Vektorrechnung

1)

Fünf Punktmassen m_1 ,m_2 , ..., m_5 seien so angeordnet, dass sie die Ecken einer gedachten, auf dem Kopf stehenden geraden quadratischen Pyramide bilden (Seitenlänge des Quadrats ist 2a, Höhe h) . m_5 befindet sich im Ursprung des Koordinatensystems.

Berechnen Sie den Schwerpunkt dieses Systems (von fünf Teilchen).
Der Ortsvektor des Schwerpunktes ist hier gegeben durch das gewichtete Mittel

$$\underline{R} = \left(\sum_{i=1}^{5} m_i \underline{r}_i \right) / \left(\sum_{i=1}^{5} m_i \right),$$

wobei $\underline{r}_i$ der Ortsvektor der Masse m_i ist.

Es sei $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$, für die Masse in der Spitze gelte $m_5 = 2m$.

2)

a)

Geben Sie die kartesischen Komponenten der folgenden Kraft $\underline{\mathbf{F}}$ an: sie soll in einem Stab wirken, der von A = (1 , 2 , 3) nach B = (0 , 4 , 7) zeigt, in die Richtung von $\underline{\mathbf{AB}}$ zeigen und den Betrag 30 (Newton) haben.

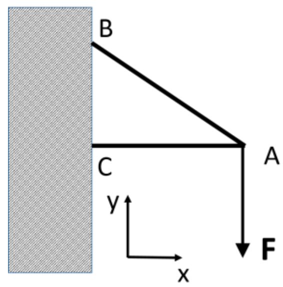
b)

Es sei B = (x , 4 , 7) . Wie muß man x wählen, damit $| F_x | > 10$ (wobei $x > 1$) .

3)

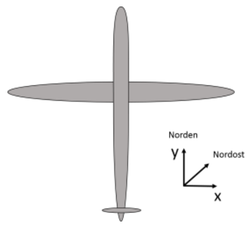
Zwei Stäbe sind an einer Wand befestigt und bilden ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C wie in der nebenstehenden Skizze. An der äußeren Spitze (Punkt A) wirkt die Gewichtskraft F senkrecht nach unten. Wie groß ist die Kraft in dem horizontalen Stab?

Gegeben sind die folgenden Größen: F = 500 N,
A=(4 m, 10 m) , B=(0, 13 m) , C =(0, 10 m).



4)

Ein Flugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von 700 km/h in nördlicher Richtung in einer Luftströmung die nach Nordosten zeigt und die eine Geschwindigkeit von 50 km/h hat (vgl. Skizze). Wie schnell fliegt das Flugzeug im Bezug zur Erdoberfläche?



Funktionen

1)
Ein Fahrzeug bewege sich gleichmäßig beschleunigt auf einer Geraden. Die Gerade möge die z - Achse in einem kartesischen Koordinatensystem sein.
Dann gilt für seinen Ort z zur Zeit t :
$z = z_0 + v_0 t + 0.5 a t^2$, wobei z_0 der Ort zur Zeit $t = 0$ ist und v_0 die Geschwindigkeit für $t = 0$, a ist die konstante Beschleunigung. Alle Größen sollen hier **positiv** sein.

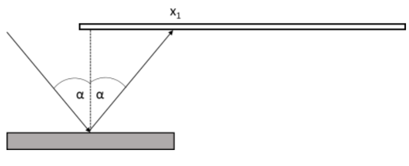
Wie lange braucht das Fahrzeug, um von z_0 nach $2z_0$ zu gelangen? Und wie lange brauchte es von $z = 0$ nach z_0 ?

2)
a)
Eine Motoraufhängung ist so ausgelegt, dass die Amplitude z(t) einer Schwingung nach 3 Sekunden auf 1/10 ihres Ausgangswertes abgeklungen ist. Bestimmen Sie damit die Kenngröße α in der Funktion $z(t) = A\, e^{-\alpha\, t}$. Die Funktion $A\, e^{-\alpha\, t} \sin(\omega\, t)$ beschreibt die gedämpfte Schwingung.

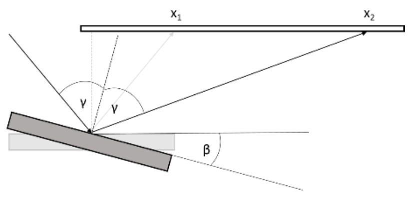
b)
Wie groß ist die Kenngröße α in der Funktion z(t) , wenn die Amplitude für die Frequenz $f = 100$ Hz nach drei Perioden auf den Wert A / e abgeklungen ist ?

3)
Gegeben seien die folgenden Wertepaare (x, f(x)): (0,3), (2,-1), (3,0). Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c der Parabel $f(x) = a x^2 + b x + c$ durch diese Punkte.

4)
a) Ein Lichtstrahl fällt auf einen Spiegel und wird dort reflektiert (siehe Skizze). Der Winkel zu einer (gedachten) senkrechten Linie am Punkt der Reflektion auf dem Spiegel ist für den einfallenden und reflektierten Strahl gleich α. Auf einem Schirm, der parallel zum Siegel steht, erzeugt der Lichtstrahl einen Fleck bei x_1. Wie groß ist der Abstand des Schirms vom Spiegel? Es sind $\alpha=40°$ und $x_1=30$ cm.



b) Nun wird der Spiegel um den Winkel β um den Punkt der Reflektion des Lichtstrahls gedreht (siehe Skizze). Wie groß ist nun der Winkel γ zur Senkrechten auf dem Spiegel? Und wie groß ist der Wert x_2, der nun für den Lichtfleck auf dem Schirm gemessen wird? Es ist $\beta=15°$.



Hinweis: Taschenrechner benutzen!

Differentialrechnung

1)
Die Bahnen zweier Teilchen seien gegeben durch (t ist die Zeit)

$\underline{r}_1 (t) = \underline{P}_1 + t\, \underline{v}_1$, $\underline{P}_1 = (-1,0,1)$, $\underline{v}_1 = (0,2,1)$ und

$\underline{r}_2 (t) = \underline{P}_2 + t\, \underline{v}_2$, $\underline{P}_2 = (0,1,0)$, $\underline{v}_2 = (1,5,1)$

Wann kommen sich die Teilchen am nächsten? Gesucht ist also - mit den Mitteln der Differentialrechnung - der minimale Abstand der Teilchen.

2)
Sei $f(x) = a\,x^3 - 2b\,x^2 + 2$, a und b sind Parameter.
a)
Wo hat f(x) Extremwerte oder Sattelpunkte? Diskutieren Sie bei Extremwerten auch den Typ (setzen Sie $a > 0$ voraus).
b)
Legen Sie a und b so fest, daß f(x) bei x = 1 als Tangente die Gerade y(x) = 3x + 1 hat. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch eine Zeichnung.

3) Eine Verpackung soll ein gegebenes Volumen V enthalten und die Form eines Zylinders haben. Wie sind der Zylinderradius r und die Zylinderhöhe h zu wählen, damit die Oberfläche A des Zylinders minimal wird?

4) Mit ihren Ableitungen kann man eine Funktion f(x) in der Umgebung einer gegebenen Stelle x_0 approximieren durch sog. Taylor-Polynome T(x).

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$$

Dabei ist $f^{(k)}(x_0)$ die k-te Ableitung von f(x) an der Stelle x_0. Es gilt die Vereinbarung $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, m.a.W., die nullte Ableitung ist die Funktion selbst. $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ nennt man die „k Fakultät". Es gilt $0! = 1$.
Misst man Winkel im Bogenmass x (mit $x = \pi \frac{\alpha}{180°}$ für einen Winkel α in Grad), so kann man $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch ein Taylor-Polynom approximieren. Geben Sie die ersten 3 Terme des Taylorpolynoms an, die nicht identisch gleich Null sind.

Bem.: Damit haben Sie im Prinzip die Möglichkeit, sich Werte des Sinus durch einfache Grundrechenarten auszurechnen.

Komplexe Zahlen

1)
Lösen Sie die folgenden Gleichungen (für $x \in \mathbf{C}$):

a) $x^2 - 10x + 27 = 0$ b) $x^2 + x + 1 = 0$
c) $5x^2 + 10x + 25 = 0$ d) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

Fassen Sie die linke Seite der Gleichung als Funktionsdefinition auf und skizzieren Sie die Graphen für <u>reelle</u> x .
Stellen Sie die Lösungen in der komplexen Zahlenebene dar.

2)
Die Spannung in einem Stromkreis sei gegeben durch $u(t) = u_0\, e^{-k\,t} \sin(\omega t)$.

In der Wechselstromlehre geht man oft zu komplexen Größen über:
$\underline{U}(t) = u_0\, e^{-k\,t}\, e^{j\,\omega\,t}$ ist dann hier die komplexe Spannung; damit ist $u(t) = \mathrm{Im}\,(\underline{U}(t))$.

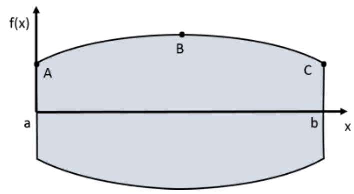
Die imaginäre Einheit wird hier mit **j** bezeichnet! Analog ist $\underline{I}(t)$ die komplexe Größe für den Strom; $i(t) = \mathrm{Im}\,(\underline{I}(t))$ ist dann der reelle Strom.

Am Kondensator gilt: $q(t) = C\,u(t)$, C ist jetzt die Kapazität, q die Ladung. Diese Beziehung wird ins Komplexe übertragen, ebenso : $\underline{I}(t) = \frac{d}{dt}\underline{Q}(t)$.
Bestimmen Sie $\underline{I}(t)$ und daraus den reellen Strom $i(t)$. Stellen Sie letzteren als zu $u(t)$ phasenverschobene Funktion dar.

Integralrechnung

1)
Ein anfangs ruhender Körper (Masse m) fällt aus großer Höhe h senkrecht nach unten. Neben der Schwerkraft (g) macht sich auch die Luftreibung (Koeffizient k) bemerkbar. Mit welcher Geschwindigkeit prallt er auf dem Boden auf ? Für die Geschwindigkeit gilt: $v(t) = \alpha \tanh(\beta t)$, $\alpha = \sqrt{mg/k}$, $\beta = \sqrt{gk/m}$.

2)
Die Beschleunigung eines Körpers sei gegeben durch
$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) =$ (sin(3t) , cos(3t) , 2) . Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$, wenn $\vec{r}(0) = (2\ ,0\ ,0)$ und $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{0}$. Der hochgestellte Punkt ist Ableitung nach der Zeit t .

3)


Das Volumen eines Fasses soll berechnet werden (vgl. Skizze). Dazu soll die Formel für Rotationskörper benutzt werden: $V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$. Die Funktion f(x) beschreibt dabei den Rand des Rotationskörpers, der durch Drehung des Randes um die x-Achse entsteht. Wie kann man nun f(x) für das Fass beschreiben? Durch eine Parabel durch die Punkte A, B und C. Deren Koordinaten seien: A = (0 cm, 22 cm), B = (37,5 cm, 30 cm), C = (75 cm, 22 cm). Bestimmen Sie die Parabel f(x) durch diese Punkte und berechnen Sie damit das Volumen des Fasses.

Mathematik in der Informatik

1)
In einem Stellenwertsystem zur Basis b steht jede Stelle für eine bestimmte Potenz b^n. So bedeutet z.B.

$$\mathbf{z = (v_2\, v_1\, v_0\, ,\, n_1\, n_2)_b}$$

ausgeschrieben:

$$\mathbf{v_2 * b^2 + v_1 * b^1 + v_0 * b^0 + n_1 * b^{-1} + n_2 * b^{-2}}$$

a) Konvertieren Sie folgende Zahlen in das Dezimalsystem: $(1101001{,}1101)_2$ $(707{,}36)_8$
b) Neben dem Binärsystem spielt das Hexadezimalsystem in der Informatik eine wichtige Rolle. Dies ist eine Stellenwertsystem zur Basis 16. Die Zeichen A, B, C, D, E und F stehen dabei für die Zahlen 10, 11, 12, 13, 14 und 15.
   Konvertieren Sie die folgenden Zahlen in das Dezimalsystem: $(BA39)_{16}$ $(4A1F)_{16}$
   Wandeln Sie diese in das Oktalsystem (b=8) um, in dem Sie die Zahlen zunächst in das Binärsystem umwandeln.
c) Ein Messgerät erfasst pro Tag ca. 10000 zehnstellige Dezimalzahlen. Diese Zahlen sollen binär abgespeichert werden. Wie viele Bits bzw. Bytes an Speicherplatz werden dafür benötigt?

2)
In einem Rechner steht für eine Zahl nur endlich viel Speicherplatz zur Verfügung. Angenommen, das entsprechende Speicherformat sähe so aus:

$$\mathbf{z = \pm\, 0,\, n_1\, n_2\, n_3\, n_4\ \ E \pm e_1\, e_2\, ,}$$

also Vorzeichen der Zahl, vier gültige Ziffern $n_1\, n_2\, n_3\, n_4$ mit $n_1 \neq 0$, Vorzeichen des Exponenten und zwei Ziffern $e_1\, e_2$ für den Exponenten. Mit 10 als Basis erhält man z.B. für die Zahl 21,30 die Darstellung z = 0,2130 E+02.
a) Stellen Sie entsprechend dar: 763,34 und 0,000043568
b) Werden zwei Zahlen addiert, muss zuvor der kleinere Exponent an den größeren angeglichen werden.
   Z.B.: 0,1234 E+02 + 0,5678 E+00 → 0,1234 E+02 + 0,0056 E+02 → 0,129 E+02
   Für welche Zahlen $x > 0$ liefert bei dieser Vorgehensweise 1 + x den Wert 0,1000 E+02 ?
c) Berechnen Sie mit obiger Vorgehensweise: $10^7 - (10^7 - 1)$
   Was erhält man, wenn man anders klammert?

3)
Übersetzen Sie die beiden folgenden Sätze in die Sprache der Aussagenlogik.
- Wenn auf der Party nicht geraucht werden darf und Paula nicht zur Party eingeladen ist, dann kommt Andrea auf die Party.
- Wenn Andrea nicht auf die Party kommt, dann darf auf der Party geraucht werden oder Paula ist zur Party eingeladen.

a) Fertigen Sie für den ersten Satz eine vollständige Wahrheitstafel an.
b) Formulieren Sie beide Sätze nur mit Hilfe von Disjunktion (ODER – Verknüpfung), Konjunktion (UND – Verknüpfung) und Negation.
c) In welcher logischen Beziehung stehen die beiden Sätze zueinander?

4)

In fast jedem Buch findet sich eine zehnstellige Nummer, nämlich die International Standard Book Number (ISBN). Beispielsweise könnte ein Buch folgende Nummer haben:

3 – 528 – 06419 – 6

Die erste Ziffer bedeutet das Erscheinungsland (3 = Deutschland), die nächsten drei Ziffern bezeichnen den Verlag und die anschließenden fünf Ziffern geben das Buch an. Bei der letzten Ziffer handelt es sich um eine Prüfziffer, die sich aus der ISBN-Nummer $b_1\ b_2\ \dots\ b_{10}$ wie folgt ergibt:

$$\mathbf{b_{10} = (1 * b_1 + 2 * b_2 + \dots + 9 * b_9) \bmod 11}$$

Anstelle von 10 wird bei b_{10} X geschrieben.

Bei der Datenerfassung treten die Einzelfehler "a → b" und Transpositionen (=Zifferndreher) „ab → ba" häufig auf.

a) Zeigen Sie, dass für eine korrekte ISBN stets

$$(1 * b_1 + 2 * b_2 + \dots + 9 * b_9 + 10 * b_{10}) \bmod 11 = 0$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass bei einer ISBN immer Einzelfehler und Transpositionen erkannt werden?

5)

Im Parlament eines Landes gibt es 151 Sitze und drei Parteien. Wie viele Möglichkeiten der Sitzverteilung gibt es, so dass keine Partei eine absolute Mehrheit hat?