Lineare Gleichungssysteme

1. Begriffe

Bspl.:

a) $2x - 3y + z = 1$

$3x \quad - 2z = 0$

Dies ist ein Gleichungssystem mit 3 Unbekannten („Variablen“) und 2 Gleichungen. Die Zahlen vor den Unbekannten heißen Koeffizienten.

b) Dasselbe System, die Unbekannten sind diesmal durchnummeriert:

$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$

$3x_1 \quad - 2x_3 = 0$

c) Das allgemeine Gleichungssystem dieses Typs; die Koeffizienten sind systematisch bezeichnet und durchnummeriert, ebenso die Werte auf der rechten Seite:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2$

Konvention: a_{ij} ist der Koeffizient in der i-ten Gleichung vor der j-ten Unbekannten.

Das spezielle System aus (b) erhält man durch die Wahl:

$a_{11} = 2$, $a_{12} = -3$, $a_{13} = 1$

$a_{21} = 3$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = -2$

$c_1 = 1$, $c_2 = 0$

Def. 1

Ein Gleichungssystem vom Typ

$$
\begin{array}{ll}
(1) & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n = c_1 \\
(2) & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots + a_{2n} x_n = c_2 \\
 & . \\
 & . \\
 & . \\
(k) & a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + a_{k3} x_3 + \ldots + a_{kn} x_n = c_k
\end{array}
\qquad (*)
$$

heißt **<u>lineares Gleichungssystem</u>** mit k Gleichungen und n Unbekannten. Auf der rechten Seite stehen nur Terme, welche die Unbekannten nicht enthalten (sog. „**Störglieder**“).

Für $k = n$ heißt das Gleichungssystem **quadratisch**. Ein System, das mehr Gleichungen als Unbekannte hat ($k > n$) , heißt **überbestimmt**. Ein System, das weniger Gleichungen als Unbekannte hat ($k < n$) , heißt **unterbestimmt**.

Das Gleichungssystem heißt linear, weil die gesuchten Unbekannten nur in Ausdrücken der Form $+ a_{ij} x_j$ vorkommen (also nur in der ersten Potenz, auch keine Produkte von Unbekannten).

Bspl.:

Das folgende Gleichungssystem ist **<u>nicht</u>** linear:

$$
\begin{aligned}
x_1^{\,2} + x_2 &= 1 \\
x_1 x_2 - x_1 / x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Bem.

Lineare Gleichungssysteme treten in sehr vielen Anwendungen auf, z.B.

- elektrische Netzwerke
- Statik
- Betriebswirtschaft

Def 2.

Man erhält eine kompakte Schreibweise des linearen Gleichungssystems $(*)$ durch die Einführung der folgenden Größen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ **Vektor** der Unbekannten (n – dimensional)

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$$ **Vektor** der Störglieder (k – dimensional)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$ **Matrix** der Koeffizienten ($k \times n$ - Matrix)

Die Matrix hat hier k Zeilen und n Spalten.
Die Vektoren müssen hier aus formalen Gründen als **Spaltenvektoren** geschrieben werden. Der Lösungsvektor wird weiter unten (Abschnitt 2) aus Gewohnheit aber wieder als Zeile geschrieben.

Damit schreibt sich das lineare Gleichungssystem so: $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$.

Das Produkt $A \cdot \vec{x}$ muss offensichtlich ein Vektor sein. Der Punkt wird oft weggelassen. Die erste Komponente muss die linke Seite der ersten Gleichung von **(*)** ergeben,
die zweite Komponente muss die linke Seite der zweiten Gleichung von **(*)** ergeben, etc .

Merkregel dazu:
man kann die Zeilen der Matrix ebenfalls als Vektoren auffassen, also
die erste Zeile als $\vec{z}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$,

die zweite Zeile als $\vec{z}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, etc .

Dann erhält man die linken Seiten von $(*)$ durch die Skalarprodukte

$\vec{z}_1 \bullet \vec{x}$, $\vec{z}_2 \bullet \vec{x}$ etc.

Wenn man die Bezeichnungen in $\vec{x}$ einmal festgelegt hat, reicht also zur Beschreibung der linken Seite einer Gleichung der entsprechende Zeilenvektor und zur Beschreibung aller linken Seiten die Koeffizientenmatrix.

Bspl. :

a) Sind die Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ und die rechte Seite $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

gegeben, lautet das entsprechende LGS für die Unbekannten $\vec{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ x_3 \end{pmatrix}$ **:**

$$
\begin{aligned}
3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\
2x_1 \qquad - 4x_3 &= 4 \\
x_2 + 7x_3 &= -1
\end{aligned}
$$

b)

Das LGS

$$
\begin{aligned}
x - 2y + 4z &= 9 \\
-2x + y \qquad &= 2 \\
- y + 2z &= 0
\end{aligned}
$$

hat die kompakte Schreibweise $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Die Zeilenvektoren von A sind :

$\vec{z}_1 = (1, -2, 4)$, $\vec{z}_2 = (-2, 1, 0)$, $\vec{z}_3 = (0, -1, 2)$

Def 3

Das lineare Gleichungssystem A $\cdot \vec{x} = \vec{0}$ (also $\vec{c} = \vec{0}$) heißt homogen.

Das lineare Gleichungssystem A $\cdot \vec{x} = \vec{c}$ (also $\vec{c} \neq \vec{0}$) heißt **in**homogen.

Der Vektor $\vec{c} \neq \vec{0}$ heißt auch Inhomogenität.

Bem.

In den Anwendungen modelliert man mit einem LGS das (lineare) Verhalten des untersuchten Systems (z.B. ein elektrisches Netzwerk).

Das homogene LGS beschreibt zunächst das System „an sich“ (die internen Zusammenhänge). Daher enthält das homogene System nur Terme, in denen die (System-) Variablen (z.B. die internen Ströme und Spannungen) vorkommen.

Das inhomogene LGS enthält auch Störglieder: diese Terme beschreiben den Einfluss der externen Umgebung, der unabhängig von den Systemvariablen ist (Terme, in denen die Systemvariablen nicht vorkommen; z.B. die von außen eingeprägte Spannung oder der eingespeiste Strom; additive Ankopplung).

Mathematisch zulässig sind auch Terme der Art: äußere Größe * Systemvariable (multiplikative Ankopplung). Ein solcher Term gehört dann zum homogenen Teil des LGS.

2. Lösungsverhalten linearer Gleichungssysteme

A)

Ein homogenes quadratisches Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat immer die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$. Diese Lösung heißt daher „trivial“.

Ein homogenes quadratisches Gleichungssystem kann auch beliebig viele Lösungen haben (eine davon ist dann $\vec{x} = \vec{0}$). Die neuen Lösungen heißen „nicht-trivial“. Solche (unendlich vielen) nicht-trivialen Lösungen existieren genau dann, wenn (mindestens) eine Gleichung aus den anderen hervorgeht.

Angenommen, es sei die i-te Gleichung, die aus den anderen hervorgeht. Da die rechte Seite in allen Gleichungen Null ist, muß man nur auf die linke Seite achten. Diese linke Seite wird durch den i-ten Zeilenvektor der Koeffizientenmatrix, also $\vec{z}_i$, beschrieben und für ihn gilt dann: er ist eine **Linearkombination** der anderen Zeilenvektoren: $\vec{z}_i = \sum\limits_{j \neq i} \lambda_j \vec{z}_j$. $\sum\limits_{j \neq i}$ heißt: der Index j nimmt alle möglichen Werte an, nur nicht den Wert i ; dabei können natürlich viele der λ_j Null sein.
Die Zeilenvektoren sind dann **linear abhängig**.

Bspl.

(1) $3x - 4y + 2z = 0$

(2) $x - 6y + 4z = 0$

(3) $x + y - z = 0$

Hier gilt : Gl. (2) = Gl. (1) - 2 * Gl. (3) ; diese Gl. enthält also keine neuen Bedingungen für die Bestimmung der Unbekannten: auf diese Gl. kann man (wenn es nur um die Bestimmung der Unbekannten geht) verzichten. Das System ist eigentlich unterbestimmt.

Die Koeffizientenmatrix lautet : $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Für die Zeilenvektoren gilt: $\vec{z}_2 = \vec{z}_1 - 2\,\vec{z}_3$; sie sind linear abhängig.

B)

Ein inhomogenes quadratisches Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ (also $\vec{c} \neq \vec{0}$) kann keine, genau eine oder beliebig viele Lösungen haben.

Ein solches System hat genau eine Lösung, wenn das zugehörige homogene Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung hat.

Ein solches System hat beliebig viele Lösungen, wenn (mindestens) eine Gleichung aus den anderen hervorgeht.
Angenommen, dies wäre die i-te Gleichung. Dann gilt wie oben:

$\vec{z}_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j \vec{z}_j$ und zugleich $c_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j c_j$.

Bspl.

(1) $3x - 4y + 2z = 1$
(2) $x - 6y + 4z = -3$
(3) $x + y - z = 2$

Die linke Seite, also die Koeffizientenmatrix, ist die gleiche wie oben, d.h.

$\vec{z}_2 = \vec{z}_1 - 2\,\vec{z}_3$ und hier gilt auch $c_2 = c_1 - 2\,c_3$.

Gl. (2) geht also aus den anderen hervor: Gl. (2) = Gl. (1) - 2 * Gl. (3) .

Ein solches System hat keine Lösung, wenn die Gleichungen **inkonsistent** sind.
Dies ist dann der Fall, wenn z.B. in der i-ten Gleichung die linke Seite aus den anderen linken Seiten hervorgeht, die rechte Seite aber nicht; also:

$\vec{z}_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j \vec{z}_j$, aber $c_i \neq \sum_{j \neq i} \lambda_j c_j$.

Bspl.

(1) $3x - 4y + 2z = 1$
(2) $x - 6y + 4z = 10$
(3) $x + y - z = 2$

Die linke Seite, also die Koeffizientenmatrix, ist die gleiche wie oben, d.h.
$\vec{z}_2 = \vec{z}_1 - 2\,\vec{z}_3$, aber $c_2 \neq c_1 - 2\,c_3$.

C)

Ein inhomogenes System, das überbestimmt ist, kann keine, genau eine oder beliebig viele Lösungen haben.
Ein inhomogenes System, das unterbestimmt ist, kann keine oder beliebig viele Lösungen haben.
Das zugehörige homogene System hat zumindest die triviale Lösung.

Hinweis:
über das Lösungsverhalten gibt auch die Determinante der Koeffizientenmatrix Auskunft; s. das Kapitel über Matrizen und Determinanten.

Bspl.

a) (1) $x + y = 0$

(2) $x - y = 1$

Das LGS hat eine eindeutige Lösung : $\vec{x} = (x, y) = (½, -½)$.

Das zugehörige homogene System hat nur die triviale Lösung $\vec{x} = (0, 0)$.

Geometrische Interpretation:

beiden Gleichungen beschreiben Geraden im R^2 , die sich in einem Punkt schneiden. Der gemeinsame Punkt, also der Schnittpunkt, ist die Lösung des LGS.

b) (1) $x + y = 2$

(2) $-3x - 3y = -6$

Gl. (2) geht aus der anderen Gl. hervor: (Gl. 2) = (-3) * (Gl. 1) ;

wir können eine Gl. nach einer Unbekannten auflösen, z.B. nach x;

jeder Lösungsvektor hat dann die Struktur $\vec{x} = (x, 2 - x)$.

Da x beliebig gewählt werden kann, hat das LGS hat beliebig viele Lösungen:

$L = \{ \vec{x} \mid \vec{x} = (x, 2 - x) \}$

Geometrische Interpretation:

die beiden Gleichungen beschreiben dieselbe Gerade im R^2 ; jeder Punkt auf dieser Geraden löst das LGS.

c) (1) $x + y = 2$

(2) $-3x - 3y = -8$

Die Gleichungen sind inkonsistent : $\vec{z}_2 = -3\,\vec{z}_1$, aber $c_2 \neq -3\,c_1$.

Geometrische Interpretation:

beiden Gleichungen beschreiben parallele Geraden im R^2 (kein Schnittpunkt).

Bem.

In einem LGS mit 3 Unbekannten beschreibt jede Gl. eine Ebene im R^3

(z.B.: $x_2 - x_3 = 0$ beschreibt eine Ebene, die über der Winkelhalbierenden $x_2 = x_3$ in der x_2 - x_3 – Ebene errichtet wird; x_1 ist beliebig)

In einem LGS mit n Unbekannten beschreibt jede Gl. eine (Hyper-) Ebene im R^n .

Bspl.

d) (1) $x + y = 2$

(2) $x - y = 1$

(3) $-3x - 3y = -6$

Dieses LGS ist überbestimmt, aber (3) geht aus (1) hervor : das LGS ist also nur scheinbar überbestimmt; aus (1) und (2) erhält man eine eindeutige Lösung.

e) (1) $x + y = 2$

(2) $x - y = 1$

(3) $-3x - 3y = -8$

Dieses LGS ist überbestimmt. Die Gl. sind inkonsistent, denn Gl. (3) passt nicht zu (1): das LGS hat keine Lösung.

f) (1) $x + y = 2$

(2) $-3x - 3y = -6$

(3) $2x + 2y = 4$

Dieses LGS ist überbestimmt, aber (2) UND (3) gehen aus (1) hervor : das LGS ist also nur scheinbar überbestimmt; da (1) als einzige relevante Gl. übrig bleibt, ist es sogar unterbestimmt und hat hier beliebig viele Lösungen.