Matrizen und Determinanten

1. Beispiele

Mit Hilfe seiner Koeffizienten-Matrix hat ein lineares Gleichungssystem die folgende kompakte Form:

$A \cdot \vec{x} = \vec{c}$; hier sind A und $\vec{c}$ gegeben , $\vec{x}$ ist gesucht.

Man kann diesen Zusammenhang verallgemeinern:

Die Vorschrift $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ ordnet jedem $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ (Vektor der unabhängigen Variablen) genau ein $\vec{y} \in \mathbf{R}^k$ (Vektor der abhängigen Variablen) zu: es liegt eine **Funktion** vor (vom $\mathbf{R}^n$ in den $\mathbf{R}^k$),

präziser: eine **lineare Abbildung** des Vektors $\vec{x}$ auf den Vektor $\vec{y}$.

Bspl. (FF I , 111)

Ein Betrieb produziert die Waren $w_1, w_2, ..., w_n$. Die Mengen (in einem bestimmten Zeitraum) seien $x_1 , x_2, ... x_n$; pro Mengeneinheit seien die entsprechenden Herstellungskosten $k_1 , k_2, ... k_n$, die Verpackungskosten $v_1 , v_2, ... v_n$, und die Transportkosten $t_1 , t_2, ... t_n$. Dann ergeben sich die Gesamtkosten für Herstellung, Verpackung und Transport :

$H = k_1 x_1 + k_2 x_2 + ... + k_n x_n$

$V = v_1 x_1 + v_2 x_2 + ... + v_n x_n$

$T = t_1 x_1 + t_2 x_2 + ... + t_n x_n$

In der Matrixschreibweise lautet dieser lineare Zusammenhang zwischen

$\vec{x} = (x_1 , x_2, ... x_n)$ und $\vec{y} = (H , V , T)$:

$$\vec{y} = A\,\vec{x} \ , \quad A = \begin{pmatrix} k_1 & \dots & k_n \\ v_1 & \dots & v_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

Bspl. : der elektrische Vierpol (s. z.B. Stingl, Papula)

Bem.

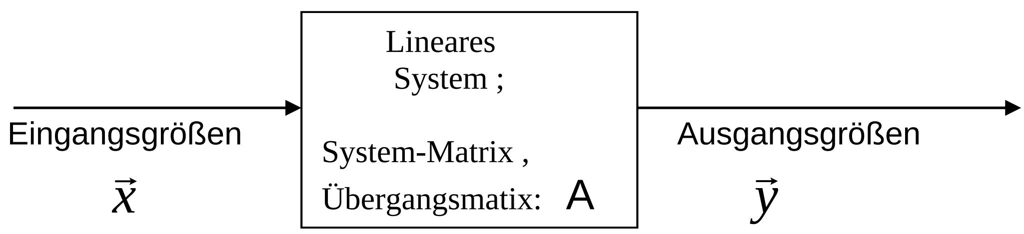
Weitere Anwendungen von Matrizen:

- Beschreibung von Drehungen im Raum

- Trägheitstensor als Verallgemeinerung des Trägheitsmoments; Auswuchten !

- in der Bedarfsrechnung für die Lagerhaltung (s. z.B. Vogt, Einführung in die Wirtschaftsmathematik)
- bei der Modellierung von Kundenströmen (Wechseln zwischen Anbietern, sog. Übergangsmatrix)
- in der Optik (einfallender Lichtstrahl - optische Instrumente - ausfallender Lichtstrahl; die „Durchgangsmatrix" ist eine Art Übergangsmatrix)
- in der Atomphysik (Quantenmechanik)

Ganz allgemein kann man sagen: wenn bei einem Systems zwischen den Eingangsgrößen und den Ausgangsgrößen ein linearer Zusammenhang besteht, können Matrizen bei der Beschreibung hilfreich sein.



2. Rechnen mit Matrizen

Def. 1

Das rechteckige Schema **A** = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ & ... & & \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kn} \end{pmatrix}$ = (a_{ij}) mit i = 1... **k** , j = 1... **n**

heißt k x n – **Matrix** .

Ein Matrixelement a_{ij} hat zwei Indizes: i ist der Zeilenindex, j ist der Spaltenindex. Das Element a_{ij} steht am Schnittpunkt der i-ten Zeile und der j-ten Spalte. Das Element wird oft auch mit A_{ij} bezeichnet.

Für k = n heißt die Matrix **quadratisch**. Die n Elemente a_{11} , …, a_{nn} heißen **Diagonal**elemente. Die anderen Elemente heißen Nichtdiagonalelemente.

Ein Zeilenvektor $\vec{X}$ = (x_1 , x_2, ... x_n) ist eine 1 x n – Matrix.

Ein Spaltenvektor $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ ist eine n x 1 – Matrix.

Das Skalarprodukt zwischen einem Zeilen- und einem Spaltenvektor wird wie üblich gebildet (die Zahl der Komponenten muss natürlich gleich sein).

$\vec{z}_i^{\,A}$ = (a_{i1} , a_{i2}, …, a_{in}) ist der i-te Zeilenvektor der Matrix A.

$\vec{s}_j^{\,A} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ ... \\ a_{kj} \end{pmatrix}$ ist der j-te Spaltenvektor der Matrix A.

Nur beim formalen Rechnen mit Matrizen muss man auf den Unterschied zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren achten (wir haben bis jetzt für einen Vektor immer stillschweigend die passende Form gewählt).

Eine quadratische Matrix, für die gilt: ihre Nicht-Diagonalelemente sind alle 0, heißt **Diagonalmatrix** .

Eine quadratische Matrix, für die gilt: alle Nichtdiagonalelemente oberhalb (unterhalb) der Diagonalen sind 0, heißt untere (obere) **Dreiecksmatrix**.

Eine quadratische Matrix, für die gilt: $a_{ij} = a_{ji}$, heißt **symmetrische** Matrix.

Diejenige n x n – Matrix, für die gilt: alle Diagonalelemente sind 1 und alle Nichtdiagonalelemente sind 0, heißt n x n – **Einheitsmatrix** und wird mit I_n oder E_n bezeichnet. Oft fehlt der Index.

Bspl.

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist eine 2 x 3 - Matrix.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ist eine 3 x 3 – Matrix und zugleich eine obere Dreiecksmatrix.

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ ist eine symmetrische Matrix.

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix .

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die 3 x 3 – Einheitsmatrix ; sie ist auch eine Diagonalmatrix .

Def. 2

Seien A = (a_{ij}) und B = (b_{ij}) beides **k x n** – Matrizen, α eine reelle Zahl. Dann gilt

(1) für die Multiplikation mit einem Skalar: α A = (α a_{ij}) , d.h. jedes Matrixelement wird multipliziert.

(2) für die Addition zweier Matrizen: A + B = (a_{ij} + b_{ij}) , d.h. die entsprechenden Matrixelemente werden addiert.

(3) für die Multiplikation einer solchen Matrix (z.B. **A**) mit einem **n** – komponentigen

(Spalten-) Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$: A · $\vec{x} = \vec{y}$ und $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$.

Die i-te Komponente des Ergebnis-Vektors erhält man durch das Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors der Matrix A mit dem Vektor $\vec{x}$: $y_i = \vec{z}_i^{\,A} \cdot \vec{x}$.

Sei A = (a_{ij}) **eine k x L – Matrix und B** = (b_{ij}) **eine L x n – Matrix. Dann gilt**

(4) für die Multiplikation der Matrizen A · B = C : $c_{ij} = \sum_{l=1}^{L} a_{il} b_{lj}$.

Das Element c_{ij} der Ergebnismatrix C steht am Schnittpunkt der i-ten Zeile und der j-ten Spalte. Dieses Element erhält man, in dem man das Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors der Matrix A mit dem j-ten Spaltenvektor von B bildet: $c_{ij} = \vec{z}_i^{\,A} \cdot \vec{s}_j^{\,B}$.

Man kann es auch so formulieren: jedes Element der i-ten Zeile von A wird mit dem entsprechenden Element der j-ten Spalte von B multipliziert. Damit jedes Element einen Partner findet, muß die Zahl der Spalten(!) in A mit der Zahl der Zeilen(!) in B übereinstimmen (hier: L).

Da es k Zeilen in A und n Spalten in B gibt, ist C eine k x n – Matrix.

Das Produkt B · A ist somit nur <u>definiert</u>, wenn die Spaltenzahl von B mit der Zeilenzahl von A übereinstimmt, also wenn k = n .

Bem.
(1) und (2) sind analog zur Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar
bzw. zur Addition zweier Vektoren.

(3) haben wir schon bei den LGS eingeführt. Da ein Spaltenvektor auch eine Matrix ist, beschreibt (3) das Produkt der k x **n** – Matrix A mit der **n** x 1 – Matrix $\vec{x}$.
Das Ergebnis ist eine k x 1 – Matrix, nämlich der k-komponentige Spaltenvektor $\vec{y}$ **.**

(4) ist die Verallgemeinerung von (3).

Bem.
Sei A eine n x n – Matrix und $\vec{x}$ ein n **-** komponentiger Spaltenvektor.
E sei die n x n – Einheitsmatrix . Dann gilt:

(1) $E \cdot A = A \cdot E = A$

(2) $E \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Satz 1

Seien A, B und C Matrizen. Dann gilt:

(1) A + B = B + A ; die Addition ist kommutativ.

(A + B) + C = A + (B + C) ; die Addition ist assoziativ.

(2) A · B ist im allgemeinen <u>nicht</u> gleich B · A : die Multiplikation ist nicht kommutativ. In vielen (Einzel-) Fällen kann sich aber ergeben: A · B = B · A .

(3) (A · B) · C = A · (B · C) ; die Multiplikation ist assoziativ.

(4) (A + B) · C = A · C + B · C

C · (A + B) = C · A + C · B ; es gilt also das Distributivgesetz.

Voraussetzung ist natürlich, dass die entsprechenden Summen bzw. Produkte ausführbar sind.

Def. 3

Sei A = (a_{ij}) eine k x n – Matrix . Man erhält die **transponierte n x k - Matrix** von A, kurz $A^{\mathbf{t}}$, indem man die Zeilen (von A) zu Spalten (von $A^{\mathbf{t}}$) macht.

Für das allgemeine Element der transponierten Matrix $A^{\mathbf{t}}$ gilt also : $(A^t)_{\mathbf{ij}} = A_{\mathbf{ji}}$.

Bei einer quadratischen Matrix (k=n) entspricht Transponieren dem Spiegeln der Elemente an der Diagonalen.

Bspl.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) **Spaltenvektor** $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, **Zeilenvektor** $\vec{x}^{\,t}$ = (x, y, z) und umgekehrt.

Satz 2

$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$; insbes. : $(A \cdot \vec{x})^t = \vec{x}^{\,t} \cdot A^t$

3. Die Inverse einer quadratischen Matrix

Zur Erinnerung:

Auflösung der Zahlen - Gleichung (d.h. x, a, und c sind reelle Zahlen)

$a\ x = c$ durch Multiplikation mit dem Inversen von a :

$a^{-1}\ a\ x = a^{-1}\ c$; da gilt: $a^{-1}\ a = a\ a^{-1} = 1$ (Eins) , erhält man

$x = a^{-1}\ c$.

Jetzt:

Auflösen des quadratischen linearen Gleichungssystems

$A \cdot \vec{X} = \vec{C}$ durch Multiplikation mit dem Inversen von A :

$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{C}$; wenn gilt: $A^{-1} \cdot A = E$ (Einheitsmatrix) , dann erhält man $\vec{X} = A^{-1} \cdot \vec{C}$.

Dann kann man für alle LGS, die sich nur in der Inhomogenität $\vec{C}$ unterscheiden, die Lösung durch einfache Multiplikation erhalten (nach einmaliger Berechnung von A^{-1})

Def. 1

Diejenige Matrix X , für die gilt $X \cdot A = E$ heißt **inverse Matrix** von A .

Schreibweise: $X = A^{-1}$, damit also $A^{-1} \cdot A = E$. Die inverse Matrix muss nicht existieren. Wenn sie existiert, heißt A regulär. Andernfalls heißt A singulär.

Hinweis: Die Inverse A^{-1} ist nicht der Kehrwert von A . Quotienten von Matrizen sind nicht definiert.

Satz 1

(1) Wenn A^{-1} existiert, gilt auch $A \cdot A^{-1} = E$ [Apo II, 66; FF I , 128].

(2) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, also eine 2 x 2 – Matrix. Dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} ;$$

Der Faktor ad – bc heißt Determinante von A , kurz det (A) oder | A | .

A ist also genau dann invertierbar (also regulär), wenn $|A| \neq 0$.

Bem.

Aussage (2) kann man einfach durch die Probe beweisen: $A^{-1} \cdot A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Hier kann man auch gleich überprüfen, dass gilt: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Bspl.

a) Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ besitze die Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Die inverse Matrix existiert: $A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Dann lautet die Lösung für eine beliebige rechte Seite: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{c}$.

Hinweis: Das LGS hat in diesem Fall also stets (für jedes $\vec{c}$) eine eindeutige Lösung!

b) Sei $Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$ die Widerstandsmatrix eines Vierpols.

Dann ist die Leitwertmatrix Y die Inverse dazu : $Y = Z^{-1}$.

Satz 2

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Bem.

Eine Matrix beschreibt ganz allgemein einen linearen Zusammenhang (eine lineare Abbildung, eine lineare Transformation), s. Abschnitt 1.

Es sei A die Matrix, welche die Transformation $\vec{x} \to \vec{x}\,'$ beschreibt

(„Hin - Transformation“): $\vec{x}\,' = A \cdot \vec{x}$.

Dann beschreibt die Inverse A^{-1} die „Rück - Transformation“ : $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{x}\,'$

Bspl. (passive) Drehung, Drehmatrix D:

Ausgangsvektor $\vec{x}$, Vektor im gedrehten System: $\vec{x}\,' = D \cdot \vec{x}$.

Zurückdrehen liefert den Ausgangsvektor: $\vec{x} = D^{-1} \cdot \vec{x}\,'$,

denn $D^{-1} \cdot \vec{x}\,' = D^{-1} \cdot D \cdot \vec{x} = E \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Bspl. Spiegelung, Matrix Sp; hier ist $Sp^{-1} = Sp$.

Bem.

Man kann die Inverse einer beliebigen quadratischen Matrix über den Gauß'schen Algorithmus berechnen.

Zur Lösung des LGS

$A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ für den gesuchten Vektor $\vec{x}$ (seine Elemente sind unbekannt) haben wir das erweiterte Schema

$(A \mid \vec{c})$ aufgestellt. Durch erlaubte Manipulationen können wir dieses Schema solange umformen, bis links die Einheitsmatrix und demzufolge rechts der Lösungsvektor erscheint:

$(E \mid \vec{x}_{\text{Lösung}})$.

Dabei kann es natürlich vorkommen, dass es keine Lösung gibt. Dies ist dann der Fall, wenn es nicht gelingt, auf der linken Seite die Einheitsmatrix zu erzeugen, weil ein Diagonalelement Null wird (Apo 2, S. 67): es entsteht dann im erweiterten Schema auf der linken Seite (links vom Strich) eine Zeile, deren Elemente alle Null sind.

Jetzt müssen wir die Gleichung lösen:

$A \cdot X = E$. Dies ist ja die Definitionsgleichung für die gesuchte inverse Matrix X . Ihre Elemente sind unbekannt. Das erweiterte Schema

$(A \mid E)$ wird solange umgeformt, bis links die Einheitsmatrix und demzufolge rechts die Lösungsmatrix erscheint:

$(E \mid X_{\text{Lösung}})$ Diese Lösungsmatrix ist die gesuchte inverse Matrix A^{-1} .

Dabei kann es natürlich vorkommen, dass es keine Lösung gibt (s.o.).
Es gibt zur Berechnung der inversen Matrix auch eine Formel, die aber nicht sehr handlich ist. Dabei muss für jedes Element eine spezielle Determinante (s. nächster Abschnitt) berechnet werden.

4. Determinanten

In Satz 3.1 tritt die Determinante einer 2 x 2 - Matrix auf.

Def. 1

Die Determinante einer 2 x 2 - Matrix ist wie folgt definiert:

A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und det(A) = | A | = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ = $a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

ist die Determinante von A (Determinante der Ordnung 2).

Man kann auch die Determinante einer beliebigen n x n - Matrix definieren (Determinante der Ordnung n).

Für eine 3 x 3 – Matrix kann man die entsprechende Determinante der Ordnung 3 nach dem Schema von Sarrus berechnen (s. Kreuzprodukt zweier Vektoren):

det (A) = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$= a_{11}\,(a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}) + a_{12}\,(a_{23}\, a_{31} - a_{21}\, a_{33}) + a_{13}\,(a_{21}\, a_{32} - a_{22}\, a_{31})$

Eine Determinante der Ordnung n wird über den **Laplace'schen Entwicklungssatz** (s. Literatur) definiert und berechnet. Dies erfolgt rekursiv: es treten Determinanten der Ordnung n - 1 auf, sog. Unterdeterminanten.

Für eine Determinante der Ordnung 3 sieht das so aus (**Vorzeichen beachten**!):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Wertet man die Unterdeterminanten aus, erhält man die obige Formel nach Sarrus.

Bspl.

Wenn man die obigen Unterdeterminanten so wie die davor stehenden Matrixelemente indiziert, erkennt man die Struktur :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, U_{11} + (-1)\ a_{12}\, U_{12} + a_{13}\, U_{13}$$

$U_{i\,j}$ ist diejenige Unterdeterminante, die entsteht, wenn man in der Ausgangsdeterminante die i- te Zeile und die j- te Spalte streicht.
Das Vorzeichen vor dem Term $a_{i\,j}\, U_{i\,j}$ ist gegeben durch $(-1)^{\mathbf{i+j}}$.

Oben ist durchgehend i = 1 . Man sagt, die Determinante wird nach der ersten Zeile entwickelt.

Satz 1
Die Determinante einer Dreiecksmatrix bzw. einer Diagonalmatrix ist das Produkt ihrer Diagonalelemente.

Bew. über den Laplace'schen Entwicklungssatz
Bspl.

Satz 2
Eine n x n – Matrix $A = (a_{ij})$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante nicht 0 ist. Für die **Inverse** gilt: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A_{adj}$. A_{adj} heißt zu A **adjungierte** Matrix. Sie ist die Transponierte der sog. **Cofaktor-Matrix** cof(A). Deren Elemente sind gegeben durch die Cofaktoren (Adjunkten) von a_{ij} : $(\text{cof } A)_{ij} = (-1)^{i+j}\ U_{ij}$; Unterdeterminante U_{ij} s.o. .

Bspl.

Satz 3
Sei A invertierbar.
(1) Das LGS $A \cdot \vec{X} = \vec{C}$ hat dann eine eindeutige Lösung.
(2) Es auch eine Lösungsformel für das LGS, die mit Determinanten arbeitet, die sog.
Cramer'sche Regel.
Die i-te Komponente des Lösungsvektors ergibt sich danach wie folgt:
$x_i = |B_i| \ / \ |A|$, wobei B_i diejenige Matrix ist, die man erhält**,** wenn man in A die i-te Spalte durch den Spaltenvektor $\vec{C}$ ersetzt.

Bem.

Satz 3 macht eine bemerkenswerte Aussage über das Lösungsverhalten von linearen (quadratischen) Gleichungssystemen $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$.

Fall 1: det(A) $\neq$ 0 ;

dann hat das inhomogene LGS die eindeutige Lösung $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{c}$.

Das zugehörige homogene LGS ($\vec{c} = \vec{0}$) hat dann nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

Fall 2: det(A) = 0 ;

dann hat das inhomogene LGS keine eindeutige Lösung, sondern keine Lösung oder beliebig viele.

Das zugehörige homogene LGS hat dann neben der trivialen Lösung (beliebig viele) nicht-triviale Lösungen.

Bem.

det(A) = 0 , wenn die Zeilen(vektoren) von A linear abhängig sind.

Bspl.

Satz 4

(1) det (A · B) = det(A) · det(B)

(2) det (A^{-1}) = 1/ det(A)

5. Matrizen und Eigenwerte / Eigenvektoren

Wenn eine Matrix A mit einem Vektor $\vec{x}$ multipliziert wird, entsteht ein neuer Vektor $\vec{y}$: $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$. Eine besondere Situation liegt vor, wenn die beiden Vektoren kollinear sind: $\vec{y} = \lambda \vec{x}$. Dann ist der Skalar λ ein sog. **Eigenwert** der Matrix A und $\vec{x}$ der dazugehörige **Eigenvektor**: $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$ $(*)$.

Wichtige Anwendungen:

- Matrix = Spannungstensor (Elastostatik), Eigenwerte = Hauptnormalspannungen, Eigenvektoren = die dazu gehörenden Richtungen;
- Matrix = Trägheitstensor (Drehbewegung eines Körpers), Eigenwerte = Hauptträgheitsmomente, Eigenvektoren = die dazu gehörenden Hauptträgheits-achsen (Bspl.: Auswuchten eines Reifens).

(Bemerkung: ein *Tensor* ist eine physikalische Größe mit bestimmten Eigenschaften, die das Aussehen einer Matrix hat.)

Einheits-Eigenvektoren und Drehmatrix:

Die Länge der Eigenvektoren ist frei wählbar, oft werden sie auf die Länge 1 normiert. Diese **Einheits-Eigenvektoren** (EEV) spielen eine besondere Rolle.
Wenn die Matrix A symmetrisch ist (z.B. Spannungstensor, Trägheitstensor), gilt: bei einem zweidimensionalen Problem findet man stets zwei Eigenvektoren, die senkrecht aufeinander stehen, und bei einem dreidimensionalen Problem findet man stets drei Eigenvektoren, die paarweise senkrecht aufeinander stehen. Man kann die Orientierung $(\pm)$ und die Reihenfolge (Nummerierung) der EEV so wählen, dass sie ein Rechts-System bilden. Die EEV spannen dann ein neues kartesisches Koordinatensystem S**'** auf.
Vom Koordinatensystem S, in dem das Problem zunächst formuliert ist, kommt man nach S**'** durch eine **Drehung der Koordinatenachsen**. Eine solche passive Drehung (nicht zu verwechseln mit der Rotations*bewegung* eines Körpers) wird durch eine weitere Matrix beschrieben, die **Drehmatrix D**. Sie kann hier mit Hilfe der Einheits-Eigenvektoren konstruiert werden: diese bilden nämlich die Zeilen der Drehmatrix.

<u>Physikalischen Größen</u> haben in S' ein anderes Aussehen, gekennzeichnet durch den Strich.

Seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ und A solche Größen und es sei

$\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ (1) der physikalische Zusammenhang.

Dann gilt dieser physikalische Zusammenhang auch in S' :

$\vec{y}' = A' \cdot \vec{x}'$ (2) ,

wobei das Aussehen der physikalischen Größen in S' gegeben ist durch

$\vec{x}' = D \cdot \vec{x}$, $\vec{y}' = D \cdot \vec{y}$, $A' = D \cdot A \cdot D^{-1}$ (3).

Die ersten beiden Gleichungen in (3) lassen sich umstellen:

$\vec{x} = D^{-1} \cdot \vec{x}'$, $\vec{y} = D^{-1} \cdot \vec{y}'$.

Damit ergibt sich aus Gl. (1) : $D^{-1} \cdot \vec{y}' = A \cdot D^{-1} \cdot \vec{x}'$.

Löst man diese Gleichung nach $\vec{y}'$ auf, erhält man $\vec{y}' = D \cdot A \cdot D^{-1} \cdot \vec{x}'$.

Vergleicht man dies mit (2), muss $A' = D \cdot A \cdot D^{-1}$ **.**

Es gilt:

A' ist eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente die Eigenwerte sind.

Die Inverse D^{-1} ist übrigens sehr leicht zu berechnen: es ist die Transponierte der Drehmatrix, also D^{t} . Dies hängt mit dem besonderen Aufbau von D zusammen, also der Tatsache, dass ihre Zeilen **Einheits**-Eigen**vektoren** sind.

<u>Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren:</u>

Wir stellen Gl. (∗) um: $A \cdot \vec{x} - \lambda \vec{x} = \vec{0}$ und klammern $\vec{x}$ aus: $(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ **(∗∗)** (zu diesem Zweck müssen wir die Einheitsmatrix E einschieben). Offensichtlich ist **(∗∗)** ein lineares homogenes Gleichungssystem für $\vec{x}$. Es hat nur dann nicht-triviale Lösungen, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix $(A - \lambda E)$ Null ist!

Daraus ergeben sich die Eigenwerte. Jeden Eigenwert setzt man dann in **(∗∗)** ein und bestimmt den zugehörigen Eigenvektor – bis auf einen frei wählbaren Faktor, den man durch Normierung auf Eins und die Forderung nach einem Rechts-System (s.o.) festlegen kann.