Taylorentwicklung (Approximation durch Polynome)

1. Problemstellung

Sei $T(x)$ die Tangente an den Graphen der Funktion $f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$:

$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Dann kann man die Funktion in der Nähe von x_0 durch die Tangente approximieren:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

oder

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \text{REST}$$

x_0 heißt in diesem Zusammenhang „Entwicklungsstelle“ oder „Entwicklungspunkt“ .

Die Approximation ist **linear**: die Variable x kommt auf der rechten Seite nur in der ersten Potenz vor; die approximierende Funktion (die Tangente) ist ein Polynom ersten Grades.

Bspl.

1) $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$

Gesucht sei $\sqrt{1.2}$. Mit $x_0 = 1$ ergibt sich:

$\sqrt{x} \approx \sqrt{1} + 1/(2\sqrt{1})(x - 1)$ und damit:

$\sqrt{1.2} \approx \sqrt{1} + 1/(2\sqrt{1})(1.2 - 1) = 1.1$.

Die Wahl von $x_0 = 1$ als Entwicklungspunkt ist sinnvoll, da $\sqrt{1}$ bekannt und $x = 1.2$ in der Nähe von $x_0 = 1$ ist. Man hätte auch $x_0 = 1.21$ nehmen können.

Die obige Approximation ist also eine Möglichkeit, um den gesuchten Wurzelwert zu berechnen. Beachten Sie: die Betätigung der entsprechenden Taschenrechnertaste bzw. der Aufruf der entsprechenden Funktion in einem Programm (Sqrt ...) löst eine ähnliche Berechnung aus, die nur wesentlich genauer ist. Eine Verbesserung der Approximation wird im zweiten Abschnitt diskutiert.

2) $f(x) = \cos(x)$, $f'(x) = -\sin(x)$

Gesucht sei $\cos(0.1)$.

Man kann natürlich den Taschenrechner benutzen. Aber beachten Sie: die Betätigung der entsprechenden Taschenrechnertaste bzw. der Aufruf der entsprechenden Funktion in einem Programm löst auch erst mal eine Berechnung aus! Eine solche Berechnung soll im Folgenden untersucht werden.

Wir versuchen es wieder mit der linearen Approximation durch die Tangente.

Als Entwicklungspunkt bietet sich $x_0 = 0$ an, da $\cos(0)$ bekannt und 0.1 in der Nähe von 0 liegt.

Aber: $f'(0) = 0$, die Funktion hat an dieser Stelle eine horizontale Tangente.

Die lineare Approximation reicht nicht aus: $\cos(x) \approx 1$ ist nicht sehr aufschlussreich.

Entweder wählt man einen anderen Entwicklungspunkt, z.B. $x_0 = \pi/6$:

$\cos(x) \approx \cos(\pi/6) - \sin(\pi/6)\,(x - \pi/6) = (1/2)\sqrt{3} - (1/2)\,(x - \pi/6)$

$\cos(0.1) \approx (1/2)\sqrt{3} - (1/2)\,(0.1 - \pi/6) \approx 1.078$.

Diese Approximation ist offensichtlich nicht sehr gut; 0.1 liegt anscheinend nicht nahe genug bei $x_0 = \pi/6$.

Oder man approximiert $\cos(x)$ durch ein Polynom höheren Grades (Grad $n > 1$). Damit lässt sich auch die Genauigkeit der Approximation steuern.

Dies soll im Folgenden gezeigt werden.

2. Das Taylorpolynom

Die Tangentengleichung erhält man aus den Bedingungen, welche die Tangente $T(x)$ im Entwicklungspunkt x_0 erfüllen muss:

$$T(x_0) = f(x_0) \quad ,$$
$$T'(x_0) = f'(x_0) \quad .$$

Diese Bedingungen werden für das gesuchte Polynom n-ten Grades verallgemeinert.

Das gesuchte Polynom hat $n+1$ (noch) unbekannte Koeffizienten:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n \qquad (*)$$

Diese Koeffizienten ergeben sich aus den folgenden $n+1$ Bedingungen:

$$p_n(x_0) = f(x_0) \quad ,$$
$$p_n'(x_0) = f'(x_0) \quad ,$$
$$p_n''(x_0) = f''(x_0)\, , \dots ,$$
$$p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \quad .$$

Man <u>fordert</u> also, dass das Polynom n-ten Grades an der Entwicklungsstelle x_0 mit der approximierten Funktion $f(x)$ im Funktionswert und den ersten n Ableitungen übereinstimmt.
Die Funktion $f(x)$ muss natürlich n mal differenzierbar sein.

Die Auswertung dieser Bedingungen erbringt für die Koeffizienten das folgende Ergebnis:
$a_i = f^{(i)}(x_0) \,/\, i!$ (sprich: i-te Ableitung geteilt durch i-Fakultät) $(**)$, also

$$a_0 = f^{(0)}(x_0) \,/\, 0! = f(x_0)$$
$$a_1 = f^{(1)}(x_0) \,/\, 1! = f'(x_0)$$
$$a_2 = f^{(2)}(x_0) \,/\, 2! = f''(x_0)\,/\,2 \quad \text{, etc.}$$

Beweis : $(*)$ n mal ableiten und die Bedingungen berücksichtigen

Setzt man diese Koeffizienten in die Gleichung (∗) ein, erhält man das **Taylorpolynom n-ter Ordnung für die Funktion f(x) mit dem Entwicklungspunkt x_0** :

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Das Taylorpolynom erster Ordnung, also $p_1(x)$, ist also identisch mit der Tangente T(x).

Bspl.: $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$

$p_0(x) = 1$,

$p_1(x) = 1$, da $f'(0) = -\sin(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

$p_2(x) = 1 - x^2/2$, da $f''(0) = -\cos(0) = -1 \Rightarrow a_2 = -1/2$

$p_3(x) = 1 - x^2/2$, da $a_3 = 0$.

Die Funktion f(x) wird durch das Taylorpolynom (n-ter Ordnung) in der Nähe von x_0 approximiert;
man sagt auch: f(x) wird um x_0 in ein Taylorpolynom n-ter Ordnung entwickelt, d.h.

$f(x) \approx p_n(x)$ bzw. $f(x) = p_n(x) + \mathbf{R_n(x)}$.

Bspl.: $\cos(x) = 1 - x^2/2 + R_3(x)$ für $x_0 = 0$.

$\cos(0.1) \approx 1 - (0.1)^2/2 = 0.995$

Wie gut diese Approximation ist, wird durch das **Restglied $\mathbf{R_n(x)}$** bestimmt. Eine Darstellung dieses Restgliedes lautet:

$$\mathbf{R_n(x)} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{x})\ (x - x_0)^{n+1}$$

Es gilt offensichtlich: $\mathbf{R_n(x_0)} = 0$; am Entwicklungspunkt stimmen Taylorpolynom und Funktion per Konstruktion überein.

Außerdem sieht man: das Restglied für das Taylorpolynom der Ordnung **n** , also $\mathbf{R_n(x)}$, hat die **Form** desjenigen Summanden, der im Taylorpolynom der Ordnung **n + 1** hinzukommt:

$$p_{\mathbf{n+1}}(x) = p_{\mathbf{n}}(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)\ (x - x_0)^{n+1}$$

Aber die Ableitung im Restglied wird nicht an der Stelle $\mathbf{x_0}$ ausgewertet, sondern an einer Stelle $\bar{x}$! Das einzige, das man über diese Stelle weiß, ist: $\bar{x}$ liegt im Intervall $[x_0, x]$.

Das Restglied kann daher nur abgeschätzt werden (könnte man es exakt berechnen, wäre auch der Funktionswert f(x) exakt bekannt). Diese Abschätzung ist u.U. nicht ganz einfach. Wir werden im Abschnitt 3 einen pragmatischen Weg besprechen.

Weitere Bspl.

3. Die Taylorreihe

Man kann man bei der Taylorentwicklung immer höhere Ordnungen (immer größeres n) berücksichtigen und schließlich den Grenzübergang $n \to \infty$ untersuchen.
Formal geht das Taylorpolynom, also die endliche Summe von Potenzfunktionen, in eine (unendliche) Reihe über. Es stellt sich damit die Frage nach der Konvergenz!

Wenn gilt: $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$ existiert (a_i siehe oben)

und $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$ = f(x) , dann heißt die Reihe **die Taylorreihe** der Funktion f(x) um den Entwicklungspunkt x_0 .

Damit dies gilt, müssen zwei Kriterien erfüllt sein:
(1) die Funktion **f(x)** muss im Intervall $[x_0 , x]$ offensichtlich beliebig oft differenzierbar sein
(2) das Restglied $\mathbf{R_n (x)}$ muss beliebig klein werden, also $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Für die wichtigsten Funktionen sind deren Taylorreihen, standardmäßig für $x_0 = 0$ („McLaurin-Reihe") , tabelliert und der Konvergenzbereich angegeben.

Wenn die Taylorreihe existiert, dann kann man die Approximation von f(x) durch ein Taylorpolynom verbessern, in dem man zu höheren Ordnungen geht. Wird an der Stelle x eine bestimmte Genauigkeit gefordert (z.B. vier signifikante Stellen), dann muss man so lange die Ordnung erhöhen, bis sich der Funktionswert des Taylorpolynoms (trotz Erhöhung der Ordnung) im Rahmen der geforderten Genauigkeit nicht mehr ändert. Soll diese Genauigkeit für alle x in einem Intervall $[x_0 , x_1]$ gelten, muss man die Rechnung an der Stelle x_1 durchführen, da die Approximation umso schlechter wird, je weiter man von der Entwicklungsstelle entfernt ist.

Bspl.