

CAS1: Ü2 A/B/C → Matrizen und Eigenwerte / Eigenvektoren (Kurzfassung)

Wenn eine Matrix A mit einem Vektor $\vec{x}$ multipliziert wird, entsteht ein neuer Vektor $\vec{y}$: $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$. Eine besondere Situation liegt vor, wenn die beiden Vektoren kollinear sind: $\vec{y} = \lambda \vec{x}$. Dann ist der Skalar λ ein sog. **Eigenwert** der Matrix A und $\vec{x}$ der dazugehörige **Eigenvektor**: $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$.

Wichtige Anwendungen:

- Matrix = Spannungstensor (Elastostatik), Eigenwerte = Hauptnormalspannungen, Eigenvektoren = die dazu gehörenden Richtungen;
- Matrix = Trägheitstensor (Drehbewegung eines Körpers), Eigenwerte = Hauptträgheitsmomente, Eigenvektoren = die dazu gehörenden Hauptträgheitsachsen (Bspl.: Auswuchten eines Reifens).

(Bemerkung: ein *Tensor* ist eine physikalische Größe mit bestimmten Eigenschaften, die das Aussehen einer Matrix hat.)

Einheits-Eigenvektoren und Drehmatrix:

Die Länge der Eigenvektoren ist frei wählbar, oft werden sie auf die Länge 1 normiert. Diese **Einheitsvektoren** spielen eine besondere Rolle.

Wenn die Matrix A symmetrisch ist (Spannungstensor, Trägheitstensor), gilt: bei einem zweidimensionalen Problem findet man stets zwei Eigenvektoren, die senkrecht aufeinander stehen, und bei einem dreidimensionalen Problem findet man stets drei Eigenvektoren, die paarweise senkrecht aufeinander stehen. Die zugehörigen Einheitsvektoren spannen dann ein neues kartesisches Koordinatensystem S' auf.

Vom Koordinatensystem S , in dem das Problem zunächst formuliert ist, kommt man nach S' durch eine **Drehung der Koordinatenachsen**. Eine solche Drehung (nicht zu verwechseln mit der Rotationsbewegung eines Körpers) wird durch eine weitere Matrix beschrieben, die **Drehmatrix** D . Sie kann hier mit Hilfe der Einheits-Eigenvektoren konstruiert werden: diese bilden nämlich die Zeilen der Drehmatrix.

Physikalischen Größen haben in S' ein anderes Aussehen, gekennzeichnet durch den Strich. Seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ solche Größen: $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$, $\vec{y}' = A' \cdot \vec{x}'$, $\vec{x}' = D \cdot \vec{x}$, $\vec{y}' = D \cdot \vec{y}$, $A' = D \cdot A \cdot D^{-1}$.

A' ist eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente die Eigenwerte sind.

Hinweis:

In den notebooks `matE_1Dreh.nb` und `matE_2Eigenwerte.nb` finden Sie weitere Informationen zu diesem Thema.