FH FFM / FB 2
Prof. Dr. D. Hackenbracht

Computeralgebra
Übung 2

Gleichungssysteme und Matrizen

1. [mat_0]

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme sowohl mit dem Befehl Solve als auch mit Hilfe der inversen Koeffizientenmatrix (sofern diese existiert)

a)
$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 2 \\ 5x - 7y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 2 \\ 6x - 4y - 2z &= 4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 2 \\ 6x - 4y - 2z &= 5 \end{aligned}$$

Lösen Sie auch das jeweilige zugehörige **homogene** Gleichungssystem.
Überprüfen Sie den bekannten **Satz** :

Ein lineares homogenes Gleichungssystem hat immer die triviale Lösung (alle gesuchten Variablen sind Null) . **Es hat dann nicht-triviale Lösungen, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix Null ist**.

Lineare Gleichungssysteme und Matrizen treten in vielen Anwendungen auf. Bearbeiten Sie bitte mindestens eine der drei folgenden Aufgaben. Machen Sie sich am besten den <u>Ablauf</u> der Rechnung auf dem Papier klar.

Die Aufgabe 4 ist eher für Maschinenbauer, die bereits die Vorlesung „Technische Schwingungslehre“ gehört haben.

2. [mat_1/ LGS4] Stellen Sie für die dargestellte **elektrische Brückenschaltung** das lineare Gleichungssystem auf, welches den Zusammenhang zwischen den Einzel-Strömen innerhalb der Schaltung ($I_1 – I_4$ sowie I_g) , dem Gesamtstrom I und den Widerständen ($R_1 – R_4$ sowie R_g) beschreibt.
Der Gesamtstrom und die Widerstände sind gegeben, die Einzel-Ströme sind gesucht.

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

a) mit dem Befehl Solve

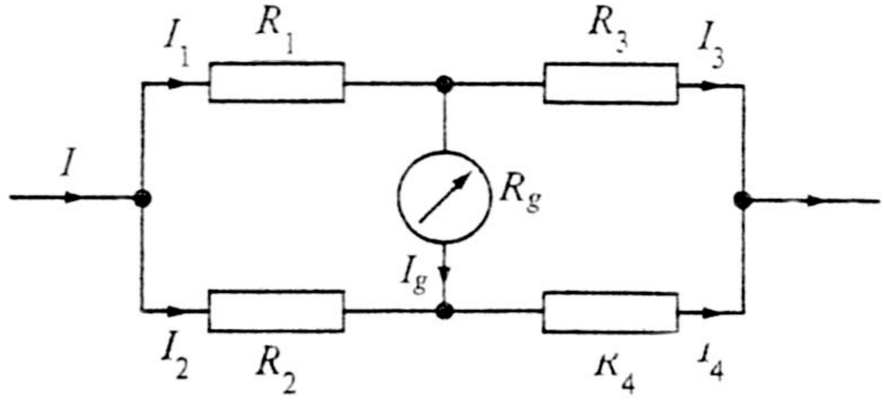
b) mit Hilfe der inversen Koeffizientenmatrix (dazu muss das Gleichungssystem **quadratisch** sein: um ein solches herzustellen, kann man – **theoretisch begründbar** - eine Knoten-Gleichung und die Gleichung für die „grosse“ Masche streichen).

Hinweis:
a)
Bezeichnen Sie die Ströme im Notebook mit i1 , i2 , etc und den Gesamtstrom mit i0 (das große I ist die imaginäre Einheit; tiefgestellte Indizes werden u.U. nicht richtig verarbeitet). Gleiches gilt natürlich für die Widerstände.

b)
Weisen Sie im allgemeinen Ergebnis den Widerständen unter Verwendung von (selbstdefinierten) Regeln Werte zu. Damit kann man das Ergebnis auch testen!

Zusatz-Aufgabe:
Erzeugen Sie eine Tabelle: R_3 soll die Werte 100,110,120 annehmen, für jeden dieser R_3-Werte soll R_4 die Werte 200 und 205 annehmen. Die anderen Widerstände erhalten willkürliche (feste) Werte. Tipp: der Mathematica-Befehl Table[...]

Skizze zur Brückenschaltung:



3. [mat_3]
Wir untersuchen ein **Fachwerk**, welches aus 3 Stäben gebildet wird. Diese Stäbe, die sich im Ursprung des gewählten Koordinatensystems treffen, sind gegeben durch die Vektoren
$\underline{a} = (-2, 1, -5)$, $\underline{b} = (2, -2, -4)$ und $\underline{c} = (0, 1, -3)$.

a)
Im Ursprung greift die Kraft $(0, 0, -56)$ an (Gewicht einer Masse). Welche Kräfte wirken in den Stäben?
Tipp: Zerlegung der Kraft in die entsprechenden Komponenten.

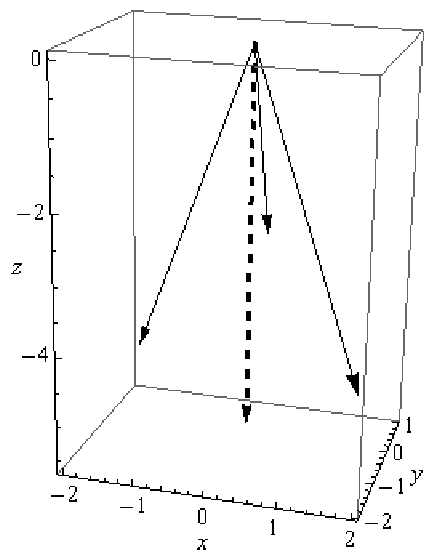
b)
Die Endpunkte der drei Vektoren liegen auf einer Ebene. Bestimmen Sie die beiden Normalenvektoren dieser Ebene. Welchen Winkel schließt der Kraftvektor mit dem Normalenvektor ein, der eine negative z-Komponente hat?

c)
Nehmen Sie einen vierten Stab hinzu, dessen Endpunkt ebenfalls auf dieser Ebene liegt. Ist eine Zerlegung der Kraft in die entsprechenden vier Komponenten möglich?

d)
Setzen Sie $\underline{b} = (bx, by, bz)$ und $\underline{c} = (cx, cy, cz)$ und bestimmen Sie die Koordinaten so, dass der Kraftvektor senkrecht auf dieser neuen Ebene steht.

Skizze zum Fachwerk:

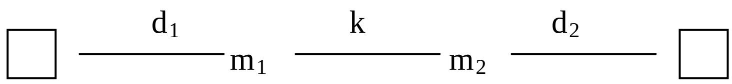
der Kraftvektor ist gestrichelt und verkürzt (in einem anderen Maßstab) dargestellt.



4. [mat_2]
Viele technische Systeme (Geräte/Apparate/Maschinen) können schwingen. Dann ist es wichtig zu wissen, welche Frequenzen dabei auftreten. Das System wird dabei nicht von außen periodisch angeregt (das wäre eine fremderregte oder erzwungene Schwingung), sondern nur einmal „angestoßen“ und dann sich selbst überlassen. Die Bewegung, die es dann ausführt, setzt sich zusammen aus Schwingungen, welche typisch für das System sind. Sie heißen deshalb **Eigenschwingungen**, die Frequenzen heißen **Eigenfrequenzen**.

Solche Untersuchungen sind u.a. Gegenstand der „**Technischen Schwingungslehre**“.

Hier soll ein **System von zwei gekoppelten Oszillatoren** untersucht werden. Diese Oszillatoren können z.B. zwei Federpendel sein: die Massen (m_1, m_2) sind einmal über eine Feder (Federkonstanten d_1, d_2) mit einer Wand verbunden und zum anderen <u>miteinander</u> über eine dritte Feder (Federkonstante k) <u>gekoppelt</u>.



Die Bewegung der Massen wird durch Gleichungen beschrieben, die sich aus dem dritten Newton’schen Axiom ergeben. Die <u>Herleitung</u> findet man z.B. in „**Alonso/Finn, Fundamental University Physics, Vol. 1**“ .

Es handelt sich um **Differentialgleichungen** (DGL), die hier ein System bilden:

(1) $m_1\ddot{x}_1 + d_1 x_1 - k(x_2 - x_1) = 0$
(2) $m_2\ddot{x}_2 + d_2 x_2 + k(x_2 - x_1) = 0$

x_1 und x_2 sind die jeweiligen **Auslenkungen aus der Ruhelage** (also die Positionen relativ zur Ruhelage). Sie hängen von der Zeit t ab.

Wenn man sich nicht für die tatsächliche Bewegung des Systems interessiert, sondern „nur“ für die Eigenschwingungen und –frequenzen, kann man folgenden <u>eingeschränkten</u> Ansatz machen: $x_1(t) = A_1 \cos(\omega t)$, $x_2(t) = A_2 \cos(\omega t)$ mit der noch unbekannten Frequenz ω .
Man könnte auch genauso gut $x_1(t) = B_1 \sin(\omega t)$, $x_2(t) = B_2 \sin(\omega t)$ ansetzen.

Da im System keine Reibung vorkommen soll, sind cos() und sin() geeignete Lösungsfunktionen.

Dieser Ansatz muss natürlich die DGL erfüllen. Er wird also in die DGL eingesetzt.
Es ergibt sich ein **lineares Gleichungssystem** für die Größen A_1 und A_2 , wobei ω als Stellgröße (Parameter) in den Koeffizienten steckt. Wenn dieses Gleichungssystem eine Lösung hat, löst der Ansatz die DGL. Dies soll jetzt in Mathematica untersucht werden.

Anleitung:

a)
Studieren Sie zunächst das notebook mat4_uebungsanleitung_oszillator.nb .

Dort wird das Problem gelöst: mit welcher Frequenz schwingt ein einfaches Federpendel, dessen DGL lautet: $m\ \ddot{x} + d\ x = 0$? In dem notebook wird der Ansatz x(t) = A cos(ωt) durchgeführt. Die Frage kann man natürlich auch beantworten, in dem man die DGL mit Hilfe des (allgemeineren) Exponentialansatzes löst.

b)
Gehen Sie dann zum gekoppelten System über.

Geben Sie (wie in **mat4_uebungsanleitung_oszillator.nb**) zunächst nur die linken Seiten der DGL ein.
Verwenden Sie dann konkret die Werte $m_1 = m_2 = 1$, $d_1 = d_2 = 4$, $k = 1$.
Vereinfachen Sie dann die linken Seiten. Anschließend können Sie die vollständigen Gleichungen definieren und das Gleichungssystem lösen.

Hinweis:

Die Null-Lösung ($A_1 = 0$, $A_2 = 0$) ist uninteressant („trivial“).
Wann hat ein lineares homogenes Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung?
Wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix Null ist!
Daraus ergeben sich die gesuchten Eigenfrequenzen. Für jede Frequenz wird dann die nichttriviale Lösung bestimmt. Damit sind die Eigenschwingungen bekannt.

Bemerkung:

1)
Wenn man an der tatsächlichen Bewegung der Massen interessiert ist, also an der **allgemeinen** Lösung der DGL, muss man den vollständigen Ansatz wählen:
$\mathbf{x_1(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)}$, $\mathbf{x_2(t) = A_2 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)}$.
Im Lösungs-Notebook gibt es dazu weitere Einzelheiten.

2)
Die gekoppelten DGL lassen sich auch mit dem Exponentialansatz lösen.