FH FFM / FB 2
Prof. Dr. D. Hackenbracht

Computeralgebra
Übung 2B
**Ergänzung: Matrizen und Drehungen**

1. [matE_1]

Mit Hilfe von Matrizen lassen sich Drehungen beschreiben. Wenn man ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem um eine Achse (bei festgehaltenem Ursprung) dreht, ändern sich die Koordinaten eines Punktes $\vec{r} =$ (x, y, z) zu $\vec{r}\,' =$ (x', y', z') . Erfolgt diese Drehung **um die z – Achse** (Drehwinkel $\alpha$ ), gilt: $\vec{r}\,' = D(\alpha)\ \vec{r}$ ,

$D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die zugehörige Matrix ; $\vec{r} = D^{-1}(\alpha)\ \vec{r}\,'$ .

Bemerkung: Die Drehung des Koordinatensystems heißt **passive** Drehung, da die eigentlichen Objekte (insbesondere die geometrischen Orte) „liegen“ bleiben. Nur ihre Koordinaten - Beschreibung ändert sich. Werden die Objekte selbst gedreht, spricht man von einer **aktiven** Drehung. Die Matrix für eine aktive Drehung um den Winkel $\varphi$ entspricht der Matrix für die passive Drehung um den Winkel $-\varphi$ .

a) Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten von $\vec{r}\,'$ , wenn $\vec{r}$ gegeben ist . Führen Sie dies erst allgemein durch und dann für spezielle Drehwinkel. **Hinweis**: bezeichnen Sie im Programm den Vektor $\vec{r}\,'$ z.B. mit rs (der Strich steht in Mathematica für die Ableitung).

b) Bestimmen Sie die inverse Matrix zu $D(\alpha)$, also $D^{-1}(\alpha)$ **.** Vergleichen Sie diese Inverse mit $D(-\alpha)$ . **Hinweis**: Bezeichnen Sie die Drehmatrix im Programm z.B. mit DrehM; D ist in Mathematica ein reservierter Bezeichner.

**Optional:**

c) Zeigen Sie, dass die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 1$ beim Übergang in ein gedrehtes („gestrichenes“) Koordinatensystem erhalten bleibt, also $x'^2 + y'^2 = 1$ . Tipp: Drücken Sie x und y durch x**'** und y**'** aus mit Hilfe der Gleichung $\vec{r} = D^{-1}\ \vec{r}\,'$ . Setzen Sie dies in die Kreis-Gleichung ein.

d) Zeigen Sie, dass aus der Hyperbel-Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ die bekannte Form $y' = a/x'$ entsteht, wenn man zu einem um $-45°$ gedrehten Koordinatensystem übergeht. Tipp: Drücken Sie x und y durch x' und y' aus mit Hilfe der Gleichung $\vec{r} = D^{-1}\ \vec{r}\,'$ . Setzen Sie dies in die obige Hyperbel-Gleichung ein.

Zeichnen Sie beide Koordinatensysteme und die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ in ein Bild.
Tipp: ContourPlot **.**