FH FFM / FB 2
Prof. Dr. D. Hackenbracht

Computeralgebra
Übung 2C

Ergänzung: Matrizen und Eigenwerte; Hauptachsen

Pflicht:

1. [matE_3]

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

Zeigen Sie explizit, dass für einen Eigenvektor $\vec{u}$ gilt: $M\,\vec{u} = \lambda\,\vec{u}$, wobei λ der zugehörige Eigenwert ist.

b)
Normieren Sie die Eigenvektoren auf Eins.
Überprüfen Sie, ob die Eigenvektoren paarweise senkrecht stehen (Tipp: Skalarprodukt) und damit ein neues kartesisches Koordinatensystem aufspannen. Außerdem muss die Nummerierung der Eigenvektoren so gewählt werden, dass sie ein Rechtssystem bilden: dazu muss das Spatprodukt positiv sein.

c)
Die Matrix **M** soll eine physikalische Größe darstellen. In dem gewählten Koordinatensystem („Laborsystem“) soll sie obiges Aussehen haben. Wenn man in das Koordinatensystem wechselt, welches die drei normierten Eigenvektoren aufspannen („**Eigensystem**“) , erhält die Matrix **Diagonalgestalt**: auf der Diagonalen stehen dann die Eigenwerte, die übrigen Matrixelemente sind Null.
Dieser Wechsel von einem Koordinatensystem ins andere Koordinatensystem ist eine Drehung. Die Drehmatrix **D** wird hier durch die Eigenvektoren selber bestimmt:
D enthält die (auf Eins normierten) Eigenvektoren <u>als Zeilen</u>.
Das Matrixprodukt $D\,\mathbf{M}\,D^{-1}$ ergibt die Diagonalmatrix .
Bestimmen Sie D . Zeigen Sie, dass die Inverse (D^{-1}) **<u>hier</u>** gleich der Transponierten (D^t) ist. Überführen Sie dann **M** in Diagonalgestalt .

2. [matE_4]

Ein mechanisch belasteter fester Körper reagiert mit Verformungen, aus denen dann (mechanische) Spannungen resultieren. Diese werden im sog. **Spannungstensor** zusammengefasst.
Bestimmen Sie die Eigenwerte σ_{ii} (**Hauptnormalspannungen**) und die <u>normierten</u> Eigenvektoren $\vec{e}_i^{\,H}$ (**Hauptrichtungen**) des folgenden Spannungstensors:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Überführen Sie S in seine Diagonalgestalt.

Kür:

3. entfällt

4. [matE_5]

In dieser Aufgabe muss man unterscheiden: die **dynamische Rotationsbewegung eines Körpers** um eine <u>Rotationsachse</u> (die Drehbewegung wird hier mit Rotation bezeichnet) und die **passive Drehung eines Koordinatensystems** (um eine <u>Drehachse</u>).

Bei **Rotationsbewegungen** sind **Drehimpuls** $\vec{L}$ und **Trägheitstensor** I wichtige Größen.

Es gilt: $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$, wobei $\vec{\omega}$ der Vektor der **Winkelgeschwindigkeit** ist und in der Rotationsachse liegt. Der Ursprung soll auf jeden Fall festgehalten (fixiert) sein.

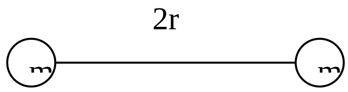
Der Trägheitstensor für eine **einzelne Punktmasse** m lautet:

$$I = m \begin{pmatrix} r^2 - x^2 & -xy & -xz \\ -yx & r^2 - y^2 & -yz \\ -zx & -zy & r^2 - z^2 \end{pmatrix} . \quad I \text{ ist symmetrisch !}$$

$\vec{r}$ = (x, y, z) ist der Ortsvektor der Masse, r = | $\vec{r}$ | ihr Abstand vom Ursprung.

Bei mehreren Massen werden die einzelnen Tensoren zum Gesamt-Tensor addiert (bei einem kontinuierlichen Körper muss man integrieren). Alle Koordinaten beziehen sich auf ein **(körper-) festes Koordinatensystem** S und sind in diesem System konstant.
Daneben gibt es auch noch das Labor-Koordinatensystem: in diesem Laborsystem sind die Koordinaten des rotierenden Körpers natürlich nicht konstant.

a)
Wir untersuchen eine „Hantel“



die aus zwei gleichen Punktmassen m mit dem Abstand 2r besteht.
Der Ursprung von S liegt in der Mitte der Verbindungslinie: jede Masse hat also den Abstand r vom Ursprung . Die **y-Achse** von S soll senkrecht auf der Papierebene stehen.
Die Hantel liegt also in der x-z-Ebene. Setzten Sie m = 1 und r = 1.

Stellen Sie den Trägheitstensor auf für die beiden Fälle:

i) die Verbindungslinie zwischen den Massen (die Symmetrieachse der Hantel) liegt in der x-Achse von K.
ii) die Symmetrieachse der Hantel liegt in der ersten Winkelhalbierenden von S. Sie ist also um 45° gegenüber der x-Achse gedreht.

b)
Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren des Trägheitstensors. Die Eigenwerte heißen jetzt **Hauptträgheitsmomente**, die (normierten) Eigenvektoren geben die sog. **Hauptträgheitsachsen** an. Die Hauptträgheitsachsen spannen ein Koordinatensystem auf, das körperfeste Eigen-System.

Bestimmen Sie die Transformationsmatrix (Drehmatrix) für die passive Drehung S → S‘ , natürlich nur, wenn sich S und S‘ unterscheiden.

c)

Die Hauptträgheitsachsen sind die Achsen, um die ein Körper „gerne“ rotiert, d.h. es treten keine unnötigen Lagerbelastungen durch Unwuchten auf. Man sieht dies mathematisch daran, dass bei der Rotation um eine Hauptachse der Drehimpuls und der Vektor der Winkelgeschwindigkeit parallel sind: sei $\vec{\omega} = \omega \vec{h}$ ($\vec{h}$ sei eine Hauptachse, der zugehörige Eigenwert sei θ), dann gilt: $\vec{L} = I \vec{\omega} = \theta \vec{\omega}$.

Überprüfen Sie dies für den Fall (ii) . Wählen Sie zum Vergleich eine Rotationsachse, die nicht Hauptträgheitsachse ist, z.B. x-Achse von S .