FH FFM / FB 2
Prof. Dr. D. Hackenbracht

Computeralgebra
Übung 3

1. [taylor_1 / TR1] Bestimmen Sie für die Funktionen sin(x) und e^x jeweils die **Taylorpolynome** 4. und 8. Grades für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

   Denken Sie an die Mathematica-Schreibweise: Sin [x] , Exp[x] ;

   Vergleichen Sie in **<u>einer</u>** Grafik die Taylorpolynome mit der jeweiligen Funktion.

   Lassen Sie sich z.B. bei x = 1 auch die Differenz (also: Funktion – Taylorpolynom) ausgeben, um das **Restglied** der Taylor-Entwicklung (den Fehler) abzuschätzen.
   Geben Sie auch die <u>relative</u> Abweichung an.

2. [taylor_2 / TR2] Entwickeln Sie f(x) = ln (1+x) um $x_0 = 0$. Vergleichen Sie auch hier in einer Grafik die Taylorpolynome 4. und 8. Grades mit der Funktion; Bereich: $0 < x < 2$.
   Hinweis: der natürliche Logarithmus heißt in Mathematica: Log[x] .

3. [taylor_4 / TR7] Gesucht ist $\int_0^{0.5} \sin(t^2)\,dt$.

   Das Integral lässt sich nicht exakt berechnen. Eine Möglichkeit, einen Näherungswert zu erhalten, besteht darin, den **<u>Integranden</u>** durch ein Taylorpolynom zu approximieren.
   Welche Ordnung muss man mindestens berücksichtigen, damit man drei Stellen (führende Nullen werden nicht gezählt) im Ergebnis garantieren kann?

   Vergleichen Sie das Resultat mit dem Ergebnis einer numerischen Integration durch NIntegrate.

   Mathematica kann das Integral scheinbar auch exakt lösen: die als Lösung ausgegebene Funktion ist aber auch nur über eine Reihe berechenbar.

   Bem.:
   Obige Aufgabe ist eine typische Anwendung für die Taylor-Entwicklung.

4.
Durch Integration der Taylor-Entwicklung von 0 bis **t** erhält man die Stammfunktion für **<u>alle</u>** t <u>im Konvergenzbereich</u> (Integrationskonstante noch ergänzen!). Führen Sie dies durch.

Eine Alternative zu diesem Vorgehen wird jetzt besprochen.
Die Funktion $f(t) = \sin(t^2)$ wird numerisch integriert, und zwar von 0 bis t_i . Dadurch erhält man die Stammfunktion an der Stelle t_i . Führt man diese Berechnung für viele t_i aus, erhält man eine Wertetabelle für die Stammfunktion.
Führen Sie diese Berechnung durch. Wählen Sie $t_i = i * 0.5 / 10$, und lassen Sie i von 1 bis 10 laufen. Tipp: Befehl Table.

Bem.
Wenn die Funktion f(t) selber nur an diskreten Stellen bekannt ist (z.B. als Ergebnis einer Messung) oder bei Konvergenzproblemen mit der Taylorentwicklung <u>muss</u> man das alternative Verfahren wählen. Die Konvergenzproblematik liegt hier bei der numerischen Integration.