5. Kritische Punkte

Wir untersuchen eine Funktion $f(x, y)$. Die graphische Darstellung dieser Funktion $z = f(x, y)$ beschreibt eine Fläche G im dreidimensionalen Raum. Wenn die Tangentialebene an diese Fläche G im Punkt $\tilde{P}_0 = (x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ **horizontal** verläuft, heißt $P_0 = (x_0, y_0)$ **kritischer Punkt der Funktion f**. $\tilde{P}_0$ heißt stationärer Punkt von G und ist ein Punkt auf der Fläche G. P_0 ist der Fusspunkt von $\tilde{P}_0$ in der xy- Ebene.

Vektor-Schreibweise: $(x, y) = \vec{r}$, $(x_0, y_0) = \vec{a}$, $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{a}$.

Das Folgende gilt auch für $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $n > 2$, also für Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Variablen.

Es gibt drei Typen von kritischen Punkten: **Maxima, Mimima und Sattelpunkte**.

Def. 1

$f(\vec{r})$ hat bei $\vec{a}$ ein **Minimum** [bzw. **Maximum**] , wenn $f(\vec{a}) \le f(\vec{r})$ [bzw. $f(\vec{a}) \ge f(\vec{r})$] **für alle** $\vec{r}$ in der Umgebung von $\vec{a}$. Ein Extremum ist ein Minimum oder ein Maximum.

Extremwerte, für die NUR < bzw. > gilt, nennt man auch strikte Extremwerte oder Extremwerte im eigentlichen Sinn. Stellt man sich die Fläche G als Gebirge vor, entsprechen diese Extrema den „einsamen" (also lokalen) Senken bzw. Gipfeln.

Lässt man wie oben auch das Gleichheitszeichen zu, spricht man auch von Extremwerten im erweiterten Sinn. Im „Funktionsgebirge" sind es langgestreckte Täler oder Berghöhen.

Satz 1

Wenn $f(\vec{r})$ im Innern des Definitionsbereichs an der Stelle $\vec{a}$ differenzierbar ist und dort ein Extremum hat, dann sind bei $\vec{a}$ alle ersten partiellen Ableitungen Null, also $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$.

Achtung: Es gibt aber auch Punkte mit $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$, die sog. Sattelpunkte sind.

Def. 2

Ein **Sattelpunkt** liegt vor, wenn $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ und wenn es in der Umgebung von $\vec{a}$ sowohl Punkte gibt mit $f(\vec{a}) < f(\vec{r})$ als auch solche mit $f(\vec{a}) > f(\vec{r})$.

Beweis:

Bei einem Extremum verläuft die Tangentialebene horizontal. Sie ist gegeben durch:

$TE(\vec{r}) = f(\vec{a}) + f_x(\vec{a})\,\Delta x + f_y(\vec{a})\,\Delta y = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot \Delta\vec{r}$.

$\nabla f(\vec{a})$ ist der Gradient von f an der Stelle $\vec{a}$. Die Ebene verläuft horizontal (parallel zur xy- Ebene), wenn $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$: dann ist $TE(\vec{r}) = f(\vec{a}) = \text{const.}$

Bem.

Es kann **am Rand** des Definitionsbereichs der Funktion (Rand-) Extrema geben, OHNE dass dort der Gradient $\vec{0}$ ist.

Es kann im Innern des Definitionsbereichs Extrema geben, obwohl f nicht differenzierbar ist. Bspl.: $f(x, y) = |x|$.

Bspl.: → **Bild D**

1) $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ hat bei (0,0) ein (striktes) Maximum.

2) $f(x, y) = x^2 + y^2$ hat bei (0,0) ein (striktes) Minimum.

3) $f(x, y) = x\,y$ hat bei (0,0) einen Sattelpunkt.

4) $f(x, y) = x^3 - 3\,x\,y^2$ hat bei (0,0) einen Sattelpunkt.

5) $f(x, y) = x^2\,y^2$ hat bei (0,y) und (x,0) , also längs der Koordinatenachsen, ein Minimum (im erweiterten Sinn)

6) $f(x, y) = 1 - x^2$ hat bei (0,y) ein Maximum (im erweiterten Sinne).

Den Typ des kritischen Punktes kann man für eine Funktion f(x, y) mit Hilfe des folgenden Satzes bestimmen:

Satz 2

Sei $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$. Wir bilden bei $\vec{a}$ die Determinante der Hesse-Matrix:

$d = \det(H(\vec{a})) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$. Es gilt:

1) $d > 0$: f hat in $\vec{a}$ ein (striktes) Extremum.
   Ist $f_{xx}(\vec{a}) < 0$, dann liegt ein Maximum vor.
   Ist $f_{xx}(\vec{a}) > 0$, dann liegt ein Minimum vor.
   Bem.: $d > 0$ ist nur möglich, wenn f_{xx} und f_{yy} das gleiche Vorzeichen haben.

2) $d < 0$: f hat in $\vec{a}$ einen Sattelpunkt.

3) $d = 0$: der Test macht keine Aussage (man muss dann die Funktion selber untersuchen, also auf die Def. eines Extremums zurückgreifen)

Bspl.

$f(x, y) = x^2 + y^2$; $f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = 2y$

Kritischer Punkt:

$\nabla f(x,y) = \vec{0}$ => $2x = 0$ und $2y = 0$.

<u>Beide Gleichungen müssen gleichzeitig erfüllt sein</u> => $x=0$ und $y=0$,

d.h. $\vec{a} = (0,0)$ ist der (einzige) kritische Punkt.

Typ-Bestimmung:

überall gilt hier $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 0$ => $d = 4 > 0$;

da außerdem $f_{xx}(\vec{a}) = 2 > 0$, hat f hier ein striktes Minimum.

In diesem einfachen Beispiel sieht man das der Funktion (ihrem Graphen) ja auch direkt an.

Beweis-Skizze zu Satz 2

a) Für eine Funktion f(x) gibt die zweite Ableitung den Ausschlag (Min oder Max), sofern $f'' \neq 0$.
Es ist also nicht erstaunlich, dass jetzt ALLE zweiten partiellen Ableitungen auftreten.

b) Die Matrix $H(\vec{a})$ steht im quadratischen Term QF der Taylor-Entwicklung von f um $\vec{a}$.
Da $\vec{a}$ ein kritischer Punkt ist, gilt: $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ und die erste Ordnung verschwindet.
Um das Verhalten von f in der Umgebung von $\vec{a}$ zu studieren, muss man daher das Taylorpolynom <u>2. Ordnung</u> von f untersuchen, also QF.

c) Ist QF für alle $\Delta\vec{r}$ positiv [bzw. negativ], so hat f bei $\vec{a}$ gemäß der Definition ein Minimum [bzw. Maximum] . Man kann zeigen, dass dies für $d > 0$ der Fall ist.

Satz 2a

Auch die Untersuchung der **Eigenwerte der Hesse-Matrix** liefert den Typ des kritischen Punktes:
Sind beide Eigenwerte positiv, liegt ein (striktes) Minimum vor.
Sind beide Eigenwerte negativ, liegt ein (striktes) Maximum vor.
Gibt es einen positiven und einen negativen Eigenwert, liegt ein Sattelpunkt vor.
Ist (mindestens) ein Eigenwert Null, macht dieses Kriterium keine Aussage.

Bem.

Beide Kriterien (Satz 2 und 2a) können auf Funktionen mit mehr als zwei Variablen verallgemeinert werden (bei 2a liegt dies auf der Hand).