2. Partielle Ableitungen

Vorbemerkung:

Bei einer reellwertigen Funktion von einer unabhängigen Variablen, f(x), gibt es nur einen Weg, um von einem Wert des Arguments, z.B. x_1, zu einem anderen Wert x_2 zu kommen: nämlich entlang der x-Achse. Bei einer Funktion von zwei unabhängigen Variablen, f(x, y), gibt es unendlich viele Wege von (x_1, y_1) nach (x_2, y_2). Bei Funktionen von mehr als zwei Variablen hat man dieselbe Situation. Diese neue Freiheit führt zu mehr Komplexität. Die Rechentechniken der Analysis bleiben im wesentlichen gleich, die Begriffe müssen aber an vielen Stellen verallgemeinert werden. Dies wird sich im Folgenden für den Begriff der Ableitung zeigen.

Zur Erinnerung:

Für eine reellwertige Funktion von einer unabhängigen Variablen, f(x), haben wir **die** Ableitung an der Stelle x_0 definiert:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad ; \quad \text{oder mit} \quad x = x_0 + h \ :$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ .$$

Die Ableitung nach dem Argument wird mit dem hochgestellten Strich gekennzeichnet. Wir haben auch die Schreibweise $\frac{df}{dx}$ kennengelernt.

Bildet man die Ableitung für alle x, für die das möglich ist, erhält man die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Analog verfährt man jetzt für Funktionen mit mehr als einer unabhängigen Variablen, wobei wir uns zunächst auf zwei unabhängige Variablen beschränken. Sei also $f = f(x, y)$. Dann kann man **zwei** erste Ableitungen bilden, eine nach x und eine nach y. Die jeweils andere Variable wird in Gedanken festgehalten, das Argument der Funktion wird also nur teilweise verändert: daher spricht man von einer **partiellen** Ableitung.

Bspl.

a) f(x, y) = 3 x + 2 y ;
   partielle Ableitung nach x : $\frac{\partial f}{\partial x}$ = 3 ; partielle Ableitung nach y : $\frac{\partial f}{\partial y}$ = 2

b) f(x, y) = 3 x^2 y + y^3 ;
   partielle Ableitung nach x : $\frac{\partial f}{\partial x}$ = 6 x y
   partielle Ableitung nach y : $\frac{\partial f}{\partial y}$ = 3 x^2 + 3 y^2

Def. 1 (partielle Ableitungen)

Sei f = f(x, y). Wir bilden die partiellen Ableitungen an der Stelle (x_0, y_0) wie folgt:

Die **partielle Ableitung nach x** lautet $f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h}$.

Die **partielle Ableitung nach y** lautet $f_y(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k}$.

<u>Die Grenzwerte müssen natürlich existieren</u>.

Die Ableitung nach der jeweiligen Variablen wird mit dem tiefgestellten Variablennamen gekennzeichnet (dies darf nicht mit der Koordinate eines Vektors verwechselt werden).

Bildet man die Ableitungen an allen Stellen (x, y), für die das möglich ist, erhält man die jeweilige partielle <u>Ableitungsfunktion</u> $f_x(x, y)$ bzw. $f_y(x, y)$. Man benutzt auch die Schreibweise $\frac{\partial f}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial f}{\partial y}$ (das runde ∂ beachten).

Analog geht man bei einer Funktion mit mehr als zwei unabhängigen Variablen vor.

Bem.

Sei z = f(x, y). Wir suchen die partiellen Ableitungen an der Stelle P_0 = (x_0, y_0). Bei der partiellen Ableitung nach x wird die Variable y festgehalten, hier auf dem Wert y = y_0 . Man betrachtet also einen ganz speziellen vertikalen Schnitt. Die Kurve, die bei diesem Schnitt entsteht, ist das Bild der Funktion z = f(x, y_0) = g(x), die nur noch von einer Variablen abhängt. Diese Funktion wird ganz normal abgeleitet. Ihre Ableitung ist die partielle Ableitung der Ausgangsfunktion f(x, y) nach x.

An die Schnittkurve kann man die Tangente TX an den Punkt $\widetilde{P_0} = (x_0, y_0, z_0)$ konstruieren, wobei $z_0 = f(x_0, y_0)$. Ihre Steigung ist gleich $f_x(x_0, y_0)$. Diese Steigung gibt an, wie rasch sich die Funktion $g(x) = f(x, y_0)$ ändert, wenn man von x_0 nach $x_0 + h$ geht, mit anderen Worten: sie gibt an, wie rasch sich die Ausgangsfunktion $f(x, y)$ längs dieses Schnittes ändert, wenn man von x_0 nach $x_0 + h$ geht.

Völlig analog interpretiert man die partielle Ableitung nach y, also $f_y(x_0, y_0)$. Sie ist gleich der Steigung der Tangente TY an den Punkt $\widetilde{P_0}$.
Beide Tangenten TX und TY zusammen spannen die **Tangentialebene an den Graphen von f(x,y) im Punkt** $\widetilde{P_0}$ auf. Die Formel für die Tangentialebene kommt in Abschnitt 4.

[zur Bezeichnung $\tilde{P}_0$:
in Mathe 1 haben wir einfach $P_0 = (x_0, y = f(x_0))$ geschrieben.
Mit P_0 soll im Zusammenhang mit zwei unabhängigen Variablen x, y aber ein Punkt in der xy-Ebene bezeichnet werden. Der zugehörige Punkt auf dem Graphen bekommt daher eine Tilde. Wo diese fehlt, können Sie diese der Deutlichkeit halber ergänzen.]

Def. 2 (höhere partielle Ableitungen)

Die ersten partiellen Ableitungen sind selber wieder Funktionen, die man partiell ableiten kann (sofern die entsprechenden Grenzwerte existieren). Dann entstehen partielle Ableitungen höherer Ordnung.

Sei f = f(x, y). Dann gibt es die folgenden partiellen Ableitungen zweiter Ordnung (die Argumente sind weggelassen):

$f_{xx} = (f_x)_x$ (die Ableitung f_x wird noch mal partiell nach x abgeleitet,
d.h. die Funktion f wird zweimal partiell nach x abgeleitet),

$f_{xy} = (f_x)_y$ (f wird <u>erst</u> partiell nach x, <u>dann</u> partiell nach y abgeleitet),

$f_{yx} = (f_y)_x$,

$f_{yy} = (f_y)_y$.

Die Ableitungen f_{xy} und f_{yx} heißen <u>gemischt-partielle</u> Ableitungen.
Sie sind gleich, wenn sie stetig sind (**Satz von Schwarz**).

Analoges gilt wieder für eine Funktion von mehr als zwei unabhängigen Variablen.