Analysis für Funktionen von mehreren Variablen
(„mehrdimensionale Analysis“)

1. Einführung

1.1 Beispiele

1) Die Temperatur in einem Raum: $T = T(x, y, z, t) = T(\vec{r}, t)$;
$\vec{r} = (x, y, z)$ ist der Ortsvektor des Raumpunktes.
Beispiele für Temperaturverteilungen und zeitliche Verläufe:

$T(\vec{r}, t) = T_0$ (konstant)

$T(\vec{r}, t) = T_0 \, e^{-at}$ (räumlich konstante Verteilung = homogene V.)

$T(\vec{r}, t) = T_0 \, e^{-ar}$ (zeitlich konstante Verteilung; räumlich radial symmetrisch, d.h. nur abhängig von $r = |\vec{r}|$)

$T(\vec{r}, t) = T_0 \, e^{-\vec{a}\cdot\vec{r}}$ (zeitlich konstante Verteilung; $\vec{a} \cdot \vec{r}$ ist ein Skalarprodukt)

$T(\vec{r}, t) = T_0 \sin(k r - \omega t)$ (Kugelwelle, also räumlich radial symmetrisch)

Wird jedem Punkt des Raumes ein Skalar zugeordnet, spricht man auch von einem **Skalarfeld**. Die Temperaturfunktion $T(\vec{r}, t)$ ist ein Skalarfeld.

2) Die elektrische Feldstärke in einem Raum, z.B. die elektrische Komponente von (<u>ebenen</u>) Radiowellen: $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \, \vec{e}_z \, \cos(k x - \omega t)$. Der Funktionswert hängt <u>hier</u> nicht von den Raumkoordinaten y und z ab.

Wird jedem Punkt des Raumes ein Vektor zugeordnet, spricht man auch von einem **Vektorfeld**. $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ist ein Vektorfeld.

3) In einem elektrischen Netzwerk mit n Widerständen ist der Strom I eine Funktion dieser Widerstände und der Spannung: $I = I(R_1, ..., R_n, U)$.

4) Eine Messung der Größe y als Funktion von x liefert eine Menge von Punkten (x_i, y_i). Durch diese Punkte soll eine Ausgleichsgerade A gelegt werden: $y = A(x) = c\,x + d$.

Die mittlere quadratische Abweichung zwischen den N Messwerten y_i und den Funktionswerten $A(x_i)$ auf der Geraden ist gegeben durch

$\Delta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[A(x_i) - y_i]^2$. Diese Größe enthält als Variablen („Stellschrauben“) nur noch die Parameter c und d. Diese sind so zu wählen, dass Δ minimal wird.

5) a) In den Materialwissenschaften, z.B. in der Elastizitätstheorie, hängen relevante Größen wie die Verzerrungsenergie i.a. von vielen Variablen ab (und natürlich von den verschiedenen Materialparametern).

b) Das von einem Automotor gelieferte Antriebs-Drehmoment hängt ab von der Drehzahl und der Gaspedalstellung („Pedalkennfeld“).

6) Mathematische Beispiele:

$f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, **n** : Anzahl der unabhängigen Variablen,

m : Anzahl der Komponenten des Funktionswertes ; z.B. :

$f(x,y) = x + y$, also $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ **.**

$f(x,y) = x^2 + y^2$; kurz : $f(\vec{r}) = r^2$; hier ist $\vec{r} = (x, y)$ ein „Orts-“ Vektor in der xy-Ebene ; wir wollen an dieser Bezeichnung festhalten, da (x,y) ein Ort in der xy-Ebene ist. Die Variablen müssen aber nicht unbedingt Raumkoordinaten sein.

$f(x,y,z) = y\,z$, also $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ **.**

$f(x,y,z) = x^2\,y\,e^{-z}$

Diese vier Funktionen sind <u>skalarwertig</u> (**m** = 1), also Skalarfelder.

Die beiden nächsten Funktionen sind <u>vektorwertig</u> (**m** > 1), also Vektorfelder:

$$\vec{f}(x,y) = (x\,y,\ x - y,\ 3x)$$

$$\vec{f}(x,y) = (a\,x + b\,y\ ,\ c\,x + d\,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

7) Im allgemeinen **n** - dimensionalen Fall $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ schreibt man auch kurz : $u = f(\vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ebenso gebräuchlich ist die Schreibweise: $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $u = f(P)$.

1.2 <u>Darstellungen</u>

1. **Wertetabelle** , z.B. für das Ergebnis einer Messung .

Bspl.: T = Temperatur, P Raumpunkt, t Zeitpunkt

T	P_1	P_2	P_3	....
t_1				
t_2				
t_3				
.				

2. **Bei physikalischen Größen**, die vom Ort $\vec{r}$ und von der Zeit t abhängen, werden oft folgende Bilder betrachtet:

a) **Momentaufnahmen**

Hält man bei der Temperaturfunktion $T(\vec{r}, t)$ die Zeit t fest, z.B. $t = t_0$, erhält man eine <u>Momentaufnahme</u>, nämlich die räumliche Temperaturverteilung zu diesem Zeitpunkt: $T(\vec{r}, t_0) = f(\vec{r})$. Viele solcher zeitlich aufeinander folgender Bilder ergeben eine sog. Animation.

Die graphische Darstellung ist nur bedingt möglich (Zahlen oder Farbe an die Raumpunkte). → **BILD**

Verbindet man jetzt die Raumpunkte, welche die gleiche Temperatur aufweisen, erhält man eine Fläche im $\mathbf{R^3}$, die sog. Niveaufläche.

b) **ortsfeste Aufnahmen**

Hält man den Ort fest, z.B. $\vec{r} = \vec{r}_0$, erhält man den zeitlichen Temperaturverlauf an diesem Ort: $T(\vec{r}_0, t) = g(t)$. Die Darstellung erfolgt wie bisher: der Graph ist eine <u>KURVE</u> im R^2. → **BILD**

3. **Mathematische Betrachtungen**

Wir beschränken uns zunächst auf ZWEI unabhängige Variablen x und y.

a)

Dann kann man den Funktionswert als dritte Raumkoordinate darstellen:
$z = f(x, y)$. Der Graph ist e ine FLÄCHE im $\mathbf{R}^3$.
Bei vektorwertigen Funktionen (von zwei unabhängigen Variablen) kann man jede Komponente so darstellen.

Beispiele: → **BILD**

1) $z = f(x, y) = 5$ (Ebene in konstanter Höhe über der xy- Ebene)
2) $z = f(x, y) = 5 - x - y$ (Ebene)
3) $z = f(x, y) = x^2$ („Dachrinne“)
4) $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ (Rotationsparaboloid ; s. Bild A1)
5) $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ („Sattel“ ; s. Bild A2)

b)

Wenn man die Funktions-Fläche mit einer **horizontalen Ebene** schneidet, also mit einer Ebene $z = c$ in konstanter Höhe parallel zur xy- Ebene, z.B. $z = 5$, erhält man in dieser Schnittebene eine Kurve. Längs dieser Kurve hat die Funktion den festen Wert c. Die Kurve heißt **Höhenlinie** zu $z = c$. Ihre Gleichung ist also gegeben durch $f(x, y) = c$. Sie kann u.U. noch nach y aufgelöst werden. Da die Gleichung die Variable z nicht mehr explizit enthält, kann die Höhenlinie in der xy-Ebene gezeichnet werden (**die Schnittkurve wird also in die xy – Ebene projiziert**).

Bspl.

6) $z = f(x, y) = x^2 + y^2$;
eine spezielle Höhenlinie: $z = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$.
Diese Höhenlinie ist ein Kreis um (0,0) mit Radius $\sqrt{5}$.
Allgemeine Höhenlinie: $x^2 + y^2 = c$; s. Bild A1.

7) $z = f(x, y) = x^2 - y^2$; die Höhenlinien sind gegeben durch die Gleichung
$x^2 - y^2 = c$; es sind Hyperbel-Äste; s. Bild A2.

8) $z = f(x, y) = x^2$; die Höhenlinie $z = c$ $(c>0)$ besteht aus zwei Geraden (parallel zur y- Achse)

9) die Isobaren auf der Wetterkarte, also die Linien gleichen Drucks zu einem festen Zeitpunkt t_0 : $p = p(x, y, t_0)$; analog: die Isothermen.

10) die Höhenlinien in einer Wanderkarte, also die Linien gleicher Höhe über Normal-Null: $h = h(x, y)$

c)

Wenn man diese Funktions-Fläche mit einer **<u>vertikalen</u> Ebene** schneidet, erhält man in dieser Schnittebene eine Kurve. Wichtige **<u>Schnitte</u>** sind solche, bei denen eine unabhängige Variable festgehalten wird:

Hält man die Variable y fest, also $y = c$ (z.B. $y = 3$), ist die Schnittebene parallel zur xz – Ebene. Die Schnittkurve wird dann in die xz – Ebene projiziert.

Hält man die Variable x fest, also $x = c$ (z.B. $x = 2$) , ist die Schnittebene parallel zur yz – Ebene. Die Schnittkurve wird dann in die yz – Ebene projiziert. → **BILD**

Es sind aber auch andere Schnitte möglich, z.B. längs der Winkelhalbierenden $y=x$.

Bem.

1) **Sehr viele Abbildungen zu diesem Thema findet man z.B. im „Papula".**

2) Auch bei **mehr als zwei unabhängigen Variablen** kann man Schnitte definieren.

a) Man hält den Funktionswert fest („horizontaler" Schnitt).
Die Gleichung $f(x_1,..., x_n) = c$ beschreibt für **n = 3** eine Fläche im $\mathbf{R}^3$, die sog. **Niveaufläche** zum Funktionswert c .
Die Flächen gleicher Raum-Temperatur (zu einem festgehaltenen Zeitpunkt) sind solche Niveauflächen.

b) Man hält n-1 Variablen fest („vertikaler" Schnitt), z.B. alle außer x_1 :
$f(x_1,c_2,..,c_n) = g(x_1)$. Dies geschieht bei den sog. partiellen Ableitungen.
Auch der oben erwähnte zeitliche Verlauf der Raum-Temperatur an einem festen Ort ist ein solcher Schnitt.

c) Bei der oben diskutierten Momentaufnahme wird aus physikalischen Gründen nur eine der vier Variablen festgehalten, nämlich die Zeit.