3. Mehrfachintegrale

Erste Grundaufgabe:

Berechnung des Volumens eines Körpers mit nicht-ebener Begrenzungsfläche.

(→ Bild B, Abb. 1)

Gegeben ist die Funktion f(x, y). A sei ein Bereich in der x-y-Ebene, z.B. ein Rechteck oder ein Kreis oder eine andere (ebene) Fläche. Wenn (x, y) in A liegt, soll z = f(x, y) positiv sein (**Kurznotation f(A) > 0**). Der entsprechende Ausschnitt des Graphen der Funktion ist dann ein Flächenstück G, das sich über A befindet („schwebt") und i.a. nicht eben ist (Kurznotation G = f(A)).

Der Körper, den wir mit K(A; f) bezeichnen wollen, wird begrenzt durch

- den Bereich A („Boden")
- das Flächenstück G = f(A) („Deckel") ,
- die über dem Rand von A errichtete senkrechte „Wand" („Mantel"). Hat die Funktion am Rand von A (oder Teilen davon) den Funktionswert Null, fehlt dort die „Wand".

Gesucht ist das Volumen V(K) dieses Körpers.

Idee (wichtig; s.a. eindimensionale Integralrechnung): (**→ Bild B, Abb. 2)**

Der Körper K(A; f) wird in n senkreche Säulen unterteilt (zerlegt).

Der Boden der i-ten Säule ist das Flächenstück ΔA_i . Ihr Volumen sei ΔV_i .

Es gilt: $V(K) = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$.

Für jede Säule wählt man innerhalb von ΔA_i willkürlich eine Stütz-Stelle (x_i, y_i), deren Funktionswert $f(x_i, y_i)$ als Höhe eines Quaders genommen wird. Das Volumen dieses Quaders ist gegeben durch $\Delta Q_i = f(x_i, y_i)\ \Delta A_i$. Das Volumen einer Säule wird so durch ΔQ_i approximiert: $\Delta V_i \approx \Delta Q_i$, und damit:

$$V(K) \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\ \Delta A_i .$$

Jetzt lässt man $n \to \infty$ gehen (immer mehr und immer feinere Säulen) und gelangt zum **Doppelintegral** (Satz 1).

Der Satz wird zunächst für eine allgemeine Funktion f(x, y) formuliert.

Satz 1

Sei f(x, y) **<u>stetig</u>** in $A \subset \mathbf{R}^2$. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$,

sofern $\Delta A_i \to 0$. Der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung und der Wahl der Stützstellen. Der Grenzwert wird mit dem folgenden Symbol bezeichnet, wenn man andeuten will, dass er aus <u>einer</u> Summe entstanden ist: $\int_A f(x,y)dA$.

Da bei der Auswertung des Integrals über den <u>flächenhaften</u> Bereich A integriert wird und dies mit Hilfe <u>zweier</u> gewöhnlicher Integrationen geschieht (s. Satz 1b), ist folgende Notation ebenfalls sinnvoll: $\iint_A f(x,y)dA$.
Das Integral heißt **Doppelintegral, Zweifachintegral**, Bereichs- oder Gebiets-integral. A ist der Integrationsbereich, dA heißt **Flächenelement**.

Satz 1a

<u>Ist f(A) > 0</u>, hat das Integral eine geometrische Interpretation: es ist das Volumen V(K). Die Funktion f muss dann mit einer Längen-Einheit bedacht werden.

<u>Ist f(A) ≡ 1,</u> ist das Integral gleich dem Volumen des Körpers mit der Grundfläche A und der konstanten Höhe 1 (eine Längeneinheit). Dieses Volumen ist zahlenmäßig gleich der Fläche von A : Fläche(A) = $\iint_A dA$.

Wir können mit dem Doppelintegral $\iint_A dA$ also auch die „**0. Grundaufgabe**“, die Berechnung der Fläche „unter einer Kurve“ **(s. eindimensionale Integralrechnung)** durchführen: A wird in der 0. Grundaufgabe begrenzt durch die x-Achse (genauer: $a \le x \le b$), durch den **Graphen der Funktion y = g(x)** (> 0) und seitlich durch die senkrechten Geraden bei x=a sowie x=b. Zur konkreten Berechnung brauchen wir aber noch den folgenden Satz 1b.

Satz 1b

Verwendet man zur Beschreibung des Integrationsbereich A <u>kartesische Koordinaten</u>, gilt für ein kleines Flächenstück: $\Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i$ oder $\Delta A_i = \Delta y_i \Delta x_i$.

Damit gilt für das Flächenelement: **dA = dx dy** oder **dA = dy dx** .

Die konkrete **Reihenfolge** der Symbole (dx, dy) legt die Integrationsreihenfolge fest.

a) <u>Der Integrationsbereich A ist das **Rechteck**</u> $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$.

Dann kann das Doppelintegral so geschrieben werden: $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx$.

Die Auswertung geschieht so: $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx = \int_a^b \{ \int_c^d f(x,y)dy \}\ dx$;

erst wird das **„innere" Integral** $\int_c^d f(x,y)dy$ berechnet, also die **<u>Integration bezüglich y, wobei x als konstant angesehen wird</u>**. Dann wird das verbleibende „äußere" Integral, also die Integration bezüglich x, berechnet.

Wegen der festen Grenzen ist aber auch die **andere Reihenfolge** problemlos möglich: $\int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \{ \int_a^b f(x,y)dx \}\ dy$.

Die Auswertung erfolgt analog zu oben: erst wird das **„innere" Integral** $\int_a^b f(x,y)dx$ berechnet, also die **<u>Integration bezüglich x, wobei y als konstant angesehen wird</u>**. Dann wird das verbleibende „äußere" Integral, also die Integration bezüglich y, berechnet.

b) <u>Der Integrationsbereich A ist ein sog. **Normalbereich**</u>.

Ein Normalbereich vom Typ I ist gegeben durch: $a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$.

Ein Normalbereich vom Typ II ist gegeben durch: $c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$.

Der Typ des Normalbereichs legt die Integrationsreihenfolge fest:

$\iint_A f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x,y)dy\,dx = \int_a^b \{\int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x,y)dy\}dx$ für den Typ I,

$\iint_A f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h1(y)}^{h2(y)} f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \{\int_{h1(y)}^{h2(y)} f(x,y)dx\}dy$ für den Typ II.

Die Integration mit den variablen Grenzen (den Funktionen) ist stets die innere Integration, die Integration mit den festen Grenzen ist die äußere Integration.

Bspl.

Das **Integrationsgebiet A ist das** **<u>Rechteck</u>** $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$.

Der Integrand sei $f(x, y) = xy + y^2$.

$$\iint_A f(x,y)dA = \int_1^2 \int_0^2 (xy+y^2)dy\,dx = \int_1^2 \{ \int_0^2 (xy+y^2)dy \}\,dx$$

$$= \int_1^2 [x\tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3]_0^2\,dx = \int_1^2 [\,(x\tfrac{1}{2}2^2 + \tfrac{1}{3}2^3) - 0]dx = \int_1^2 (2x + 8/3\,)dx$$

$$= [\,x^2 + 8/3\,x\,]_1^2 = (2^2 + 8/3 \cdot 2) - (1^2 + 8/3 \cdot 1) = 17/3 .$$

Die **Reihenfolge der Integrationen** kann wegen der festen Grenzen problemlos vertauscht werden: $\int_0^2 \int_1^2 (xy+y^2)dxdy = \int_0^2 \{ \int_1^2 (xy+y^2)dx \}\,dy$.

Da der Integrand im Integrationsgebiet positiv ist, also $f(A) > 0$,
ergibt das Integral hier das **Volumen** V(K) des Körpers K(A; f) .

Bspl.: Konkrete Durchführung der 0. Grundaufgabe

Wir können jetzt das Doppelintegral $\iint_A dA$ konkreter hinschreiben.

Das Integrationsgebiet A, dessen Fläche wir suchen, **ist ein Normalbereich** vom Typ I: $a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, wobei $g_1(x) \equiv 0,\ g_2(x) \equiv g(x)$,
also : $a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq g(x)$. Damit lautet das Doppelintegral:

$$\iint_A dA = \int_a^b \int_0^{g(x)} dydx = \int_a^b \{\int_0^{g(x)} dy\}\,dx = \int_a^b [\,y\,]_0^{g(x)}\,dx = \int_a^b (g(x) - 0)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

Wir erhalten das bekannte eindimensionale Integral für die Flächenberechnung.

Satz 1c

Bei der Verwendung anderer Koordinaten gilt für das Flächenelement dA eine andere Beschreibung, z.B. in **Polarkoordinaten**: **dA = r dr dφ** bzw. **dA = r dφ dr.**

<u>Beachten Sie den zusätzlichen Faktor r</u> .

r ist der Abstand eines Punktes im Integrationsgebiet A (also in der xy-Ebene) zum Ursprung. Damit gilt in kartesischen Koordinaten: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Bspl.:

Das **Integrationsgebiet A ist die <u>Kreisfläche</u>** , Mittelpunkt (0, 0) , Radius R.

<u>In kartesischen Koordinaten</u> gilt für die Punkte auf der Kreis<u>linie</u>: $x^2 + y^2 = R^2$ $(*)$.
A ist dann ein Normalbereich vom Typ I oder II, je nachdem, nach welcher Variable die Gleichung $(*)$ aufgelöst wird.

Typ I : $-R \leq x \leq R, \quad -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$.

Typ II : $-R \leq y \leq R, \quad -\sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2}$.

<u>In Polarkoordinaten</u> ist die Beschreibung von A einfacher: $0 \leq r \leq R, \; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, also nur feste Grenzen! Die Integrationsreihenfolge ist dann egal !

Es soll jetzt das **Volumen der Halbkugel** über dieser Kreisfläche berechnet werden. Die Halbkugel ist also der Körper K(A; f) . Der Graph der Funktion f , die wir noch festlegen müssen, ist die „obere" Begrenzung des Körpers (die Oberfläche, der „Deckel"). Gesucht ist V(K).

<u>In kartesischen Koordinaten</u> gilt für alle Punkte auf der Oberfläche dieser Halbkugel:
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z > 0$.
Diese Gleichung wird nach z aufgelöst: $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.
Die „obere" Begrenzung ist der Graph dieser Funktion $z = f(x, y)$.
Bei Wahl von Typ I zur Beschreibung von A erhalten wir für das Volumen:

$V(K) = \int_{-R}^{R} \int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x,y) dy dx$, wobei $g_1(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}, \; g_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Man kann über Symmetrie-Überlegungen die Rechnung vereinfachen.

<u>In Polar-Koordinaten</u> gilt für die Punkte auf der Oberfläche $r^2 + z^2 = R^2$, denn $x^2 + y^2 = r^2$. Diese Gleichung wird nach z aufgelöst: $z = f(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$.
Die „obere" Begrenzung ist der Graph dieser Funktion $z = f(r)$.
Wir erhalten für das Volumen:

$V(K) = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r)\, r \, d\varphi \, dr$ oder $V(K) = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r)\, r \, dr \, d\varphi$.

Die Rechnung ist jetzt einfacher.

Zweite Grundaufgabe:

Masse eines ebenen Flächenstücks bei nicht-konstanter Flächendichte

Sei $\rho(x, y)$ die **Flächendichte** eines ebenen Flächenstücks (also Masse pro Flächeneinheit, „Massenbelegung“). Diese Flächendichte muss nicht konstant sein.

Das Integral $\iint_A \rho(x, y)\, dA$ ergibt die Gesamtmasse M des Flächenstücks A.

Der Integrand heißt jetzt offensichtlich $\rho(x, y)$ statt f(x, y) .

Auch das kann man wie oben herleiten: die Masse Δm_i des Flächenstücks ΔA_i ergibt sich näherungsweise als $\rho(x_i, y_i)\, \Delta A_i$. Dies gilt deshalb nur näherungsweise, weil für das gesamte Flächenstück ΔA_i derselbe Dichte-Wert $\rho(x_i, y_i)$ genommen wird; dies gilt exakt aber nur bei konstanter Dichte ! Für die Gesamtmasse ergibt sich dann:

$M = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i)\, \Delta A_i$ und im Grenzübergang das Doppelintegral

$M = \iint_A \rho(x, y) dA$.

Bem.

1)

Ein Doppelintegral wird also berechnet, indem nacheinander zwei eindimensionale Integrale berechnet werden (man spricht auch von iterierten Integralen).

Diesen Vorgang kann man für f(A) > 0 auch wieder **geometrisch interpretieren**:

Der Integrationsbereich A sei das Rechteck $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$.

Der Körper wird jetzt nicht in senkrechte Säulen zerlegt, sondern durch vertikale Schnitte parallel zur x-Achse in k Scheiben zerlegt. Für die i-te Scheibe gilt auf der vorderen Begrenzungsfläche $y = y_i$. Die Scheibe hat außerdem eine Dicke Δy_i.

Das Volumen ΔS_i dieser Scheibe kann näherungsweise berechnet werden durch „ Flächeninhalt der vorderen Scheibenbegrenzungsfläche · Dicke “ =

$\left(\int_a^b f(x, y_i) dx \right) \Delta y_i$.

Dann gilt für das Volumen des Körpers: $V(K) \approx \sum_{i=1}^{k} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{k} \left(\int_a^b f(x, y_i)\, dx\right) \Delta y_i$.

Der Grenzübergang $k \to \infty$ liefert dann das Doppelintegral $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx\, dy$.

Die Integration bezüglich x ist dann zwangsläufig die innere Integration.

Analog kann man auch Scheiben einführen durch Schnitte parallel zur y-Achse.

Auch für Normalbereiche kann man obige Überlegung anstellen.

2)

Die Darstellung für ein kleines Flächenstück: $\Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i$ oder $\Delta A_i = \Delta y_i \Delta x_i$ ist am Rande eines krummlinig begrenzten Gebietes auch nur eine Approximation.

Im Grenzübergang $\Delta A_i \to 0$ spielt das aber keine Rolle mehr.

3)

Je nachdem, was der Integrand bedeutet, kann das Integral auch eine andere Interpretation haben, z.B. **Flächenträgheitsmoment** oder **Schwerpunktkoordinaten des Flächenstücks**.

Dritte Grundaufgabe:

Berechnung der Masse eines Körpers K mit <u>nicht-konstanter Massendichte</u> .

Idee (vergl. auch die Bem. zu Satz 1a):
Die Dichte sei gegeben durch die Funktion $\rho(x, y, z)$, kurz $\rho(P)$.
Der Körper K wird in n kleine Teil-Körper ΔK_i unterteilt (zerlegt). Das Volumen von ΔK_i sei ΔV_i . In jedem ΔK_i wählt man <u>willkürlich</u> eine Stützstelle
$P_i = (x_i, y_i, z_i)$. Die Masse von ΔK_i ist dann näherungsweise $\Delta m_i \approx \rho(P_i)\, \Delta V_i$.
Dies gilt deshalb nur näherungsweise, weil für das ganze ΔK_i derselbe Dichte-Wert $\rho(P_i)$ genommen wird; dies gilt exakt aber nur bei konstanter Dichte.

Es gilt dann: $M = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(P_i) \Delta V_i$

Jetzt lässt man $n \to \infty$ gehen (immer mehr und immer kleinere Teil-Körper) und gelangt zum **Dreifachintegral** (Satz 2).

Der Satz wird zunächst für eine allgemeine Funktion f(x,y,z) formuliert.

Satz 2
Die Funktion $f(x, y, z)$, kurz: f(P), sei **<u>stetig</u>** in $K \subset \mathbf{R}^3$. $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ ist ein Punkt in K . Dann existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$ sofern $\Delta V_i \to 0$.
Der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung und der Wahl der Stützstellen. Der Grenzwert wird mit dem folgenden Symbol bezeichnet, wenn man andeuten will, dass er aus <u>einer</u> Summe entstanden ist: $\int_K f(x, y, z)\, dV$.

Da bei der Auswertung des Integrals über den <u>körperhaften</u> Bereich K integriert wird und dies mit Hilfe <u>dreier</u> gewöhnlicher Integrationen geschieht, ist folgende Notation ebenfalls sinnvoll: $\iiint_K f(x, y, z)\, dV$.
Das Integral heißt **Dreifachintegral** oder Volumenintegral.
Der Körper K ist der Integrationsbereich, dV heißt **Volumenelement**.

Satz 2a

<u>Ist der Integrand f(x,y,z) die Dichtefunktion</u>, die wie üblich mit $\boldsymbol{\rho}$(x,y,z) bezeichnet werden soll, so ist das Integral gleich der Masse des Körpers K .

<u>Ist der Integrand f(x,y,z) ≡ 1,</u> so ist das Integral gleich dem Volumen des Körpers: V(K) = $\iiint_K dV$. **Die erste Grundaufgabe kann also auch so gelöst werden**. Dies kann leicht gezeigt werden. Dazu brauchen wir aber erst Satz 2b.

Satz 2b (→ Bild B, Abb. 3)

Verwendet man zur Beschreibung des Integrationsbereich K <u>kartesische Koordinaten</u>, gilt für das Volumen des kleinen Teilkörpers: ΔV_i = $\Delta x_i\ \Delta y_i\ \Delta z_i$ bzw. eine entsprechende Permutation.

Damit gilt für das Volumenelement: **dV = dx dy dz** bzw. eine entsprechende Permutation der Symbole.

Die konkrete **Reihenfolge** der Symbole (dx, dy, dz) legt die Integrationsreihenfolge fest.

a)

<u>Der Integrationsbereich K ist der **Quader**</u> a ≤ x ≤ $b,\ c \le y$ ≤ d, $e \le z$ ≤ f.

Dann kann das Dreifachintegral so geschrieben werden: $\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$.

Das Dreifachintegral wird dann berechnet, indem nacheinander drei eindimensionale Integrale berechnet werden (sog. iterierte Integrale):

$\int_a^b \{\int_c^d \left\{\int_e^f f(x,y,z)\, dz\right\}\ dy\ \}\ dx$.

Hier wird erst die Integration bezüglich z ausgeführt (y und x werden konstant gehalten), dann die y-Integration (x wird konstant gehalten) und dann die x-Integration.

Da alle Grenzen konstant sind, ist die Integrationsreihenfolge beliebig (wenn der Integrand wie vorausgesetzt <u>stetig</u> ist !) und man kann z.B. auch schreiben:

$\int_e^b \{\int_c^d \left\{\int_a^b f(x,y,z)\, dx\right\}\ dy\ \}\ dz$.

b)

<u>Der Integrationsbereich K ist ein sog. **Normalbereich**</u>.

Ein Normalbereich vom Typ I ist gegeben durch:

a ≤ x ≤ b, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, $h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y)$.

Dann kann das Dreifachintegral so geschrieben werden:

$$\int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_{h1(x,y)}^{h2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx \;=\; \int_a^b \{\int_{g1(x)}^{g2(x)} \left\{\int_{h1(x,y)}^{h2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\right\} dy\,\} dx$$

Bezüglich der Reihenfolge gilt:

Die z – Integration, deren Grenzen von x <u>und</u> y abhängen, ist zwingend die innere Integration. Dann kommt die y – Integration, deren Grenzen von x abhängen. Die x – Integration mit den festen Grenzen ist die äußere Integration.

Bei Normalbereichen anderen Typs ist die Integrationsreihenfolge entsprechend anders zu wählen.

Bspl.: Lösung der ersten Grundaufgabe über ein Dreifachintegral

Der Körper K sei der folgende Integrationsbereich:

a ≤ x ≤ b, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, 0 $\leq z \leq h(x,y)$ (also nur **positive z - Koordinate** !)

Der Integrationsbereich ist also ein Normalbereich vom Typ I .

Der Integrand f(x,y,z) ≡ 1.

Das Volumen des Körpers ist gegeben durch das **Dreifach**integral

$$\iiint_K 1\, dV \;=\; \iiint_K dV \;=\; \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_0^{h(x,y)} d\,z\, dy\, dx \;=\; \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} \{\int_0^{h(x,y)} dz\}\, dy\, dx.$$

Die z-Integration kann sofort ausgeführt werden:

$$\int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} [\,z\,]_0^h\, dy\, dx \;=\; \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} h(x,y)\, dy\, dx \quad .$$

Dies ist aber gerade das **Doppel**integral zur Berechnung des Volumens des Körpers K (A; h): V(K) = $\iint_A h(x,y) dA$. Der Integrand h(x,y) im Doppelintegral ist der „Deckel“ des Körpers. Das Integrationsgebiet A des Doppelintegrals (der „Boden“ des Körpers) ist gegeben durch a ≤ x ≤ b, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$.

Satz 2c **(→ Bild B, Abb. 4)**

Bei der Verwendung anderer Koordinaten gilt für das Volumenelement dV eine andere Beschreibung, z.B. in **Zylinderkoordinaten**: **dV = r dr d$\boldsymbol{\varphi}$ dz** (oder permutiert). Zylinderkoordinaten sind räumliche Polarkoordinaten (die z-Koordinate kommt neben den Polarkoordinaten r und $\boldsymbol{\varphi}$ einfach als dritte Koordinate hinzu). Für den **Faktor r** im Volumenelement gilt in kartesischen Koordinaten weiterhin:

r $=\sqrt{x^2+y^2}$.

Wichtig sind auch **Kugelkoordinaten**: **dV = $\mathbf{r^2}$ sin$\boldsymbol{\vartheta}$ dr d$\boldsymbol{\varphi}$ d$\boldsymbol{\vartheta}$** (oder permutiert).

Beachten Sie den **Faktor $\mathbf{r^2}$ sin$\boldsymbol{\vartheta}$** in dV.

<u>**Achtung**</u>: r ist jetzt der Abstand eines dreidimensionalen Punktes P vom Ursprung. Der Ortsvektor des Punktes P sei $\vec{r}$, dann ist r = $|\vec{r}\,|$, also in kartesischen Koordinaten: r $=\sqrt{x^2+y^2+\ z^2}$ **!!!** ϑ ist der sog. Polarwinkel zwischen dem Ortsvektor $\vec{r}$ und der z-Achse, positiv von der z-Achse gezählt.

φ ist wieder der Winkel in der xy-Ebene (also zwischen der x-Achse und dem Vektor zum Fußpunkt von P) und heißt Azimuthal-Winkel.

Bspl.

Das Volumen der Halbkugel (Mittelpunkt = Ursprung, Radius R) soll jetzt über ein **Dreifach**integral berechnet werden (also ein weiteres Beispiel zur Lösung der ersten Grundaufgabe über ein Dreifachintegral)**.** Die Halbkugel ist also der <u>Integrations-bereich K</u>. In Kugelkoordinaten lautet er: $0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \vartheta \le \pi/2$, also nur feste Grenzen ! Die Integrationsreihenfolge ist dann egal !

V(K) $= \iiint_K\ dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta\ d\varphi\ dr$ (oder eine andere Reihenfolge).

Bem.

1) Die Darstellung für ein kleines Flächenstück: $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i\ \Delta z_i$ ist am Rande eines durch nicht ebene Flächen begrenzten Körpers auch nur eine Approximation. Im Grenzübergang $\Delta V_i \to 0$ spielt das aber keine Rolle mehr.

2) Je nachdem, was $f(x,y,z)$ bedeutet, kann das Integral auch eine andere Interpretation haben, z.B. **Massenträgheitsmoment** oder **Schwerpunktkoordinaten des Körpers**.