FH FFM / FB 2
Prof. Dr. D. Hackenbracht

Computeralgebra 2
Übung 3D_1

1. [3D1]
Erstellen Sie für die Funktion $z = f_1(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 2\,x\,y$ die folgenden Graphiken:

a) den Funktionsgraphen für $-2 < x < 2$, $-3 < y < 3$

b) die vertikalen Schnitte $x=0$ bzw. $y=0$ bzw. $y=x$; zeichnen Sie diese Schnitte im normalen Plot und auch als Kurven im Raum (Parameter-Plot).

c) die Höhenlinien allgemein

d) die Höhenlinie für $z=4$; zeichnen Sie letztere auch als Kurve im Raum

Wiederholen Sie die Aufgaben (a) – (c) für $z = f_2(x,y) = -x^3 - y^3 + 3\,x\,y$.

2. [3D2]
Ermitteln Sie für die obigen Funktionen die kritischen Punkte (Minimum, Maximum, Sattelpunkt).

Die notwendige Bedingung lautet: die beiden ersten partiellen Ableitungen müssen 0 sein.

Der Typ eines kritischen Punktes ergibt sich, wenn man Glück hat, aus der sog. **Hesse-Matrix**
$H = \begin{matrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{matrix}$. Diese Matrix enthält bei einer Funktion von zwei Variablen auf der Hauptdiagonalen die beiden zweiten „reinen“ partiellen Ableitungen (nach x bzw. y) und als Nebendiagonalelemente die gemischt-partiellen Ableitungen (die für obige Funktionen gleich sind).

An **<u>jedem</u>** kritischen Punkt wird die Matrix dann berechnet und es werden ihre **Eigenwerte** bestimmt.
Sind **alle** Eigenwerte der Hesse-Matrix <u>an dem gerade untersuchten kritischen Punkt</u> positiv, handelt es sich bei dem Punkt um ein Minimum. Sind alle negativ, liegt ein Maximum vor. Gibt es positive und negative Eigenwerte, liegt ein Sattelpunkt vor. Ist ein Eigenwert 0 , ist über H keine Aussage möglich. Eigenwerte in Mathematica: Eigenvalues[...].

Bem:

a) Man kann auch die Determinante von H untersuchen (s. Mathe 2).

b) Manchmal kann man die Natur des kritischen Punktes auch mit Hilfe geeigneter Bilder (Graph, vertikale Schnitte, Höhenlinien) bestimmen.

Beides wird in dem Lösungsvorschlag angesprochen.

3. [3D3]

Bestimmen Sie Masse und Schwerpunkt eines Quaders mit den Kantenlängen 2a, 2b, 2c.
Wir legen den Ursprung in seinen geometrischen Mittelpunkt.
Dann ist das Integrationsgebiet: $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $-c \leq z \leq c$.
Benutzen Sie a=1, b=2, c=3 sowie

i) die konstante Dichte $\rho(x,y,z) = 3$
ii) die ortsabhängige Dichte $\rho(x,y,z) = 3\,e^{-x}$ (diese Funktion bezieht sich auf das oben gewählte Koordinatensystem).

4. [3D4]

Es geht in dieser Aufgabe um Volumen und Masse **<u>des Inneren</u>** eines „Eierbechers“.

Die Oberfläche (Gefäßwand) des Eierbechers ist gegeben durch die Funktion
$z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Bei (0 , 0) berührt der Eierbecher also die xy - Ebene.
Die Höhe sei $z = 4$.

Benutzen Sie zur Bestimmung der Masse:

i) die konstante Dichte $\rho(x,y,z) = 3$;
ii) die ortsabhängige Dichte $\rho(x,y,z) = 3\,e^{-x}$ (diese Funktion bezieht sich auf das oben gewählte Koordinatensystem).

a)
Arbeiten Sie in dieser Teilaufgabe mit **kartesischen Koordinaten**.

Zeichnen Sie die Höhenlinie z=4. Sie ist die Randkurve eines Bereichs A in der xy-Ebene.
Die Variablen x und y dürfen nur innerhalb dieses Bereichs A liegen: dieser Bereich ist also der **Kreis um (0,0) mit Radius R=2** .

Lassen Sie sich den Eierbecher zeichnen. Stören Sie sich nicht an graphischen Unzulänglichkeiten (die Schnittkurve ist erst mal nicht glatt; Abhilfen werden im Lösungsvorschlag gezeigt).

Bestimmen Sie dann Volumen und Masse mit Hilfe von Dreifach-Integralen.
Beachten Sie, dass die Oberfläche die <u>untere</u> Begrenzung des Körpers ist.

b)
Arbeiten Sie in dieser Teilaufgabe mit **Zylinderkoordinaten.**

Lassen Sie den Eierbecher mit Hilfe von Zylinderkoordinaten als Parameter-Plot zeichnen.
Berechnen Sie das Volumen und die Masse mit Hilfe von Zylinderkoordinaten.