FH FFM / FB 2
Prof. Dr. D. Hackenbracht

Computeralgebra 2
Übung dgl_3

Gekoppelte Systeme

1. [dgl10/DGL2_7]

A, B und C sind Teilchensorten. Wir betrachten die Umwandlungskette A -> B -> C
(eine Abfolge chemischer Reaktionen oder eine radioaktive Zerfallskette).
Es gelte für die Umwandlung A -> B :

$\dot{a} = - k_1 a$. a(t) ist die **Anzahl** der A-Teilchen zur Zeit t, k_1 ist positiv.
$\dot{a}$ ist also die Rate, mit der A-Teilchen vernichtet werden.
Für die Umwandlung B -> C gelte ein analoges Gesetz (Konstante k_2).
Stellen Sie zunächst die DGLen auf für b = b(t) und c = c(t).

Hinweis:
Beachten Sie, dass B-Teilchen auch erzeugt werden! Überlegen Sie sich, mit welcher Rate B-Teilchen entstehen und mit welcher Rate B-Teilchen zerfallen. Die Rate, mit der C-Teilchen entstehen, entspricht der negativen Zerfallsrate der B-Teilchen.

Lösen Sie dann alle drei DGLen gleichzeitig mit DSolve. Setzen Sie zunächst $k_1 = 0.01$, $k_2 = 0.005$ sowie a(0) = 1000, b(0) = 0 und c(0) = 0. Experimentieren Sie dann mit den k-Werten.

Analyse schwingungsfähiger Systeme

2. [dgl11/DGL3_5a]
Wir untersuchen ein schwingungsfähiges System mit Dämpfung ($\gamma \neq 0$) und äußerer Anregung:

$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin(\omega t) , x = x(t)$.

a)
Stellen Sie die Verhältnisse konkret für $\gamma = 2$, $\omega_0^2 = 4$, $\omega = 3$, A = 5 , x(0) = 2, $\dot{x}(0) = 0$ dar. Stellen Sie den abklingenden Anteil der Lösung separat dar (Plot). Ab welchem Zeitpunkt kann er vernachlässigt werden (er ist der sog. transiente Anteil der Lösung) ?

b) („Optimierung der Systemreaktion“)
Für welche Anregungsfrequenz ω ist die Reaktion (die Antwort) des Systems am deutlichsten, also die Amplitude der durch die äußere Anregung erzwungenen Schwingung am größten ?

Rechnen Sie zunächst ohne konkrete Werte (und ohne Anfangsbedingungen), **dann erkennt man die Struktur besser.**

Tipp: die erzwungene Schwingung hat die Struktur a cos(ωt) + b sin(ωt). Ihre Amplitude ist dann gegeben durch $\sqrt{a^2 + b^2}$ und hängt noch von ω ab. Untersuchen Sie diese Funktion für die obigen Werte $\gamma = 2$, $\omega_0^2 = 4$, A = 5 (ω ist natürlich variabel!).