Mathematica in 15 Minuten

Stefan Englert

schlurcher@gmx.net

7. Juli 2006

Motivation

`Mathematica` ist ein hervorragendes Programm um mathematische Berechnungen – auch sehr komplexe – auf relativ einfache Art und Weise durchführen zu lassen.

Leider erscheint die Bedienung dieses Programms auf den ersten Blick sehr kompliziert und verwirrend. Dennoch ist es für jeden Studenten einer Naturwissenschaft hilfreich, wenn er mit Mathematica umgehen kann.

Dieses Skript soll eine wirklich kurze Einführung in Mathematica geben, wobei die in der Überschrift postulierten 15 Minuten dafür vielleicht nicht ganz ausreichen werden. Viel länger sollte es auch nicht dauern.

Um dies zu gewährleisten wird die generelle Funktionsweise von Mathematica, also wie Formeln oder Grafiken verarbeitet werden, komplett ausgeblendet. Es ist vielmehr eine ergebnisorientierte Einführung, die die Verwendung von Mathematica als erweiterter Taschenrechner ermöglichen und Anreiz zu mehr schaffen soll.

Dabei wird folgende Grobgliederung verwendet:

- **Grundlagen:** Graphische Oberfläche, einfache Berechnungen, Formeleingabe
- **Bedienung:** Vorstellung einiger Kommandos und Einblick in die Funktionsweise
- **Praxis:** Beispielhafte Berechnung einiger Abitur- und Übungsaufgaben

Diese Einführung soll auch als Nachschlagewerk einiger gängiger Anwendungen von Mathematica dienen. Als weitere Hilfe für den Einstieg sei auch noch auf meine Befehlszusammenfassung (*Download unter:* www.schlurcher.de.vu) verwiesen.

Nun bleibt mir nur noch, euch viel Spaß mit Mathematica zu wünschen!

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen

Parallel zu dieser Einführung sollte man immer Mathematica geöffnet haben, um so nochmals selbst die hier aufgezeigten Berechnungen durchzuführen. Zu Beginn ist es ratsam alle Befehle genau so einzugeben, wie sie hier abgedruckt sind, da auch Groß- und Kleinschreibung, Leerzeichen oder in die richtige Richtung zeigende Apostrophe bei der Eingabe wichtig sind. Erst später sollte man die hier vorliegenden Beispiele verändern, um so das Verständnis für Mathematica zu erhöhen.

1.1. Bedienungsoberfläche

Nach dem Start von Mathemtica erscheint folgendes Fenster:

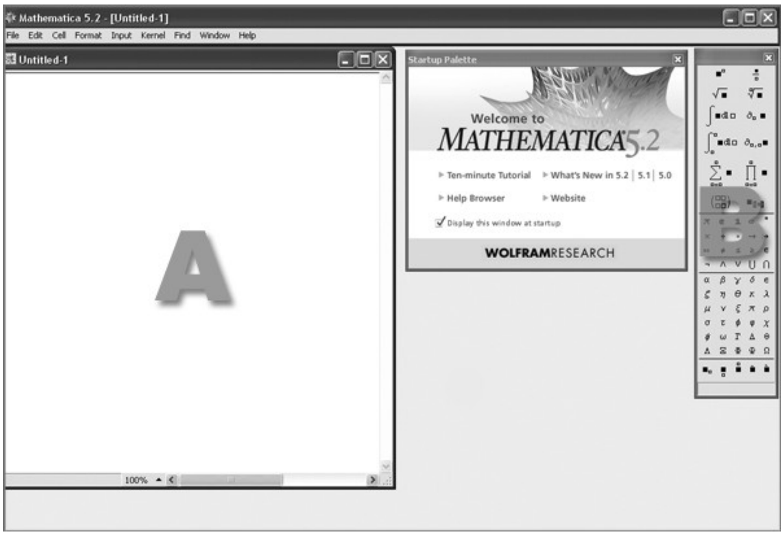


Abbildung 1: Standardoberfläche von Mathematica 5.2

Mathematica hat bereits links das erste Eingabefenster, welches im Folgenden als Notebook bezeichnet wird, geöffnet (in Abbildung 1 mit einem A gekennzeichnet). Rechts daneben befindet sich das Willkommensfenster von Mathematica Version 5.2, welches unter anderem auf ein zehn minütiges Tutorial, das aber nur bedingt empfehlenswert ist, verweist. Am rechten Rand befindet sich die *Basic Input*-Palette (in Abbildung 1 mit einem B gekennzeichnet), die die Formeleingabe in Mathematica erleichtert. Von dieser werden wir im Folgenden öfters Gebrauch machen.

1.2. Der erste Versuch

Mathematica ist selbstverständlich ein hervorragender Taschenrechner. Wir wollen deshalb gleich damit anfangen die ersten – noch sehr einfachen – Berechnungen mit Mathematica durchzuführen.

Man klicke dazu links in das Notebook und gebe die einfache Berechnung `2 + 2` ein.

Durch Drücken der `Enter`-Taste auf dem Num-Block oder `Shift` + `Enter` führt Mathematica diese erste Berechnung aus. Dabei startet Mathematica zuerst den „Kernel“, der alle Berechnungen durchführt, deshalb kann die erste Berechnung etwas dauern.

Danach sollte folgende Ausgabe im Notebook erscheinen:

In[1]:= **2 + 2**

Out[1]= 4

Im Folgenden wird auf In[...]:= – so markiert Mathematica die Eingabe – und Out[...]= – dies ist die Ausgabe von Mathematica – aus Platzgründen verzichtet. Stattdessen werden die Eingaben **fett** und die Ausgaben leicht eingerückt formatiert.

Nach erfolgter Ausführung wechselt der Cursor automatisch in ein neues freies Feld im Notebook, in dem die nächste Berechnung eingegeben werden kann.

1.3. Erste Berechnungen

Einfache Berechnungen führt Mathematica wie jeder Taschenrechner aus. Die Eingabe erfolgt wie gewohnt über + - * /. Selbstverständlich kennt Mathematica die *Punkt-vor-Strich* und *Klammer*-Regeln. Man sollte jedoch ausschließlich runde Klammern ( ) nutzen. Dies kann aber in beliebiger Schachtelung passieren.

2 * 4 - (2 + 4) / 8

$\frac{29}{4}$

Des Weiteren kann man Potenzen mit ^ und Fakultäten mit ! eingeben. Dies zeigt auch, dass Mathematica mit (fast) beliebig großen Zahlen umgehen kann.

(5 ^ 2)!

15511210043330985984000000

Ebenso können Wurzeln berechnet werden. Diese werden durch gleichzeitiges drücken von `Strg` und 2 oder durch klicken der entsprechenden Schaltfläche auf der Basic-Input-Palette eingefügt. Danach muss lediglich in den dafür vorgesehenen Platzhalter (ein kleines Rechteck) die gewünschte Zahl eingetragen werden.

$\sqrt{3}$

$\sqrt{3}$

Beim letzten Beispiel sieht es so aus, als ob Mathematica die Wurzel aus 3 nicht berechnen könnte, da der erwartete Wert von 1.73205... nicht ausgegeben wurde. Genau das Gegenteil ist jedoch der Fall. Mathematica rechnet symbolisch und gibt deshalb, falls möglich, den genauen symbolischen Wert an, der in diesem Fall nun einmal $\sqrt{3}$ ist.

Wie man eine numerische Lösung für diese Wurzel erhält folgt im nächsten Kapitel.

Potenzen, Brüche lassen sich wie vieles andere auch in einer „schöneren“, aber häufig auch umständlicheren Form eingeben.

Meist erleichtert jedoch die Basic-Input-Palette die Eingabe. Durch einen Klick auf die entsprechenden Schaltflächen erhält man die „Rohform“ einer Formel, die Platzhalter an den Stellen enthält, an denen Werte oder weitere Formeln eingetragen werden können. Zwischen den Platzhaltern wechselst man mit der Tabulatortaste.

Wie man Formeln in Mathematica eingibt, wird nun am Beispiel

$$(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}) + \pi$$

ausführlich dargelegt (Spezialtasten oder Tastenkombinationen sind *schräg* formatiert):

Zuerst eine Klammer	`(`
Dann wird das Summenzeichen durch die Palette eingefügt.	*Summenzeichen auf Palette*
Eingabe der Werte für die unteren Platzhalter	`k` ***`Tabulatortaste`*** `1`
Wechsel zum Platzhalter über dem Summenzeichen.	***`Tabulatortaste`***
Eingabe des Unendlich-Symbols (*inf sind die „normalen“ Buchstaben i n und f*)	$\boxed{\textit{Esc}}$ `inf` $\boxed{\textit{Esc}}$
Wechsel zur Eingabe in der Summe	***`Tabulatortaste`***
Eingabe des Zählers und Wechsel zum Nenner *oder*	*Bruchsymbol auf Palette* `1` ***`Tabulatortaste`*** `1` ***`Strg+Shift+7`***

Eingabe der Potenz
 	
oder
	Potenzsymbol auf Palette
	`k` ***`Tabulatortaste`*** `2`
	
	`k` ***`Strg+6`*** `2`

Wechsel zur Standardeingabeebene des Bruchs	***`Strg+Leertaste`***
Wechsel zur Standardeingabeebene der Summe	***`Strg+Leertaste`***
Restliche Eingabe	`)` `+` $\boxed{\textit{Esc}}$ `p` $\boxed{\textit{Esc}}$

Die Auswertung dieser Formel mittels der `Enter`-Taste auf dem Num-Block oder `Shift` + `Enter` liefert das erwartete Ergebnis von $\pi + \frac{\pi^2}{6}$.

Zur Formeleingabe siehe auch Kapitel 2 bis 4 meiner Befehlszusammenfassung[1].

[1]Download unter: http://hometown.aol.de/schlurchern2/mathematica.htm

2. Bedienung

In diesem Abschnitt werden einige Kommandos von Mathematica vorgestellt, womit ein Einblick in die Funktionsweise von Mathematica vermittelt werden soll.

2.1. Verwendung von Kommandos

Zuerst werden am Beispiel des Befehls der numerischen Ausgabe ein paar grundlegende Dinge zu Mathematica-Kommandos dargelegt.

Jedes Kommando wird auf den in eckigen Klammern befindlichen Ausdruck direkt dahinter angewendet. Für die numerische Ausgabe lautet das Kommando `N`.

N[$\sqrt{3}$]

1.73205

Die meisten Kommandos lassen sich noch spezifizieren; in diesem Fall z.B. durch die gewünschte Stellenanzahl.

N[$\sqrt{3}$, 20]

1.7320508075688772935

Durch `?...` erhält man eine kurze Beschreibung des Kommandos zusammen mit einem Verweis ins Handbuch, in dem oft auch Beispiele zu finden sind.

?N

N[expr] gives the numerical value of expr. N[expr, n] attempts to give a result with n-digit precision.

2.2. Grundlegende Konstanten und Funktionen

Die eulersche Zahl wird in Mathematica als großes E eingegeben, während in der Ausgabe stets ein kleines e erscheint.

E

e

Ein hinter einer Eingabe angefügter Strichpunkt verhindert die Ausgabe, nicht aber die Auswertung eines Befehls.

Sin[π];

Die meisten elementaren Funktionen der Mathematik können intuitiv erraten werden. Dabei ist zu beachten, dass alle Mathematicakommandos mit Großbuchstaben beginnen. Mit `Log` ist – wie in der Mathematik üblich – der natürliche Logarithmus gemein. Der aus der Schule bekannte `Ln` existiert nicht.

Cos[π]; ArcTan[π]; Log[2];

?Ln

Information::notfound: Symbol Ln not found.

Ebenso einfach ist es den Betrag einer komplexen Zahl zu berechnen.

Abs[2 + 3 I];

2.3. Rechnen mit Buchstaben

Eine große Stärke von Mathematica ist es, dass es symbolisch, also mit Variablen wie x und y, rechnet und demnach auch diesen Ausdruck vereinfachen kann.

Simplify[$x^2 + 2x + 1$**]**

$(1 + x)^2$

Die Umkehrung der Vereinfachung ist in diesem Fall das Ausklammern.

Expand[$(1 + x)^2$**]**

$1 + 2x + x^2$

Dabei sind Mathematica auch Vereinfachungen trigonometrischer Funktionen bekannt.

Simplify[$Sin[x]^2 + Cos[x]^2$**]**

1

2.4. Variablen und Funktionen

Selbstverständlich kann man in Variablen Ausdrücke abspeichern und mit diesen dann rechnen. Da alle Mathematicakommandos mit Großbuchstaben beginnen ist es sinnvoll, die selbst definierten Variablen klein zu schreiben.

a = 4;

a*a

16

Diese Ausdrücke können auch selbst Buchstaben enthalten. Hierbei ist darauf zu achten, dass x kein Wert zugewiesen wurde, da sonst dieser eingesetzt wird.

b = x+1;

b*b

$(1 + x)^2$

Sollen die Variablen von einer anderen Variablen abhängen und Werte einsetzbar sein, so ist die Eingabe etwas komplizierter. Der Unterstrich nach dem x ist dabei zur Funktionsdefinition notwendig.

f[x_] = x + 1;

x+1

Die explizite Berechnung von Werten erfolgt, als ob `f` ein normales Kommando wäre.

f[2]

3

Diese Variablen und Funktionsdefinitionen haben nun aber zur Folge, dass Mathematica z.B. a immer mit 4 identifiziert.
(*Zu welchen Fehlern das mitunter führen kann siehe Kapitel 3 auf Seite 11*)

?a

Global‘a
a = 4

Um eigene Definitionen wieder zu entfernen ist ein etwas umständlicher Befehl notwendig.

Remove[a]
oder – um alle zu entfernen
Remove["Global`*"]

2.5. Gleichungssystem und Substitutionsregeln

Gleichungssysteme werden in Mathematica mit doppeltem Gleichheitszeichen eingegeben.	**2x + 4 == 16;**
Der Befehl zum Lösen eines Gleichungssystems heißt `Solve`. Danach muss noch die Variable angegeben werden, nach der das Gleichungssystem gelöst werden soll.	**Solve[2x + 4 == 16, x]** {{x → 6}}

Als Ergebnis des Solve-Kommandos erhält man eine Subsitutionsregel. In diesem Fall {x → 6}. Dies ist etwa so zu lesen: „Für x = 6 ...“. D. h. insbesondere, dass `x` kein Wert durch Mathematica zugewiesen wurde (vgl. dazu auch den vorherigen Abschnitt, in dem Variablen Werte zugewiesen wurden).

Diese Subsitutionsregel kann dazu genutzt werden für x diesen Wert in einen bestehenden Ausdruck einzusetzen. Dies erfolgt mit `/. x -> ...`	**2x + 4 /. x → 6** 16
Weiterhin bleibt x ohne Wert. Wurde x ein Wert zugewiesen funktioniert im übrigen obige Subsitutionsregel nicht mehr.	**x** x

2.6. Listen

Wenn mehrere Elemente gruppiert werden sollen, so verwendet Mathematica dafür Listen. Das sind durch geschweifte Klammern zusammengefasste und durch Kommata getrennte Ausdrücke.

Die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erfolgt in Listen komponentenweise. Man kann sie sich deshalb als Vektoren vorstellen.	**{1,2,a} * 2** {2, 4, 2a}
Das gewöhnliche Skalarprodukt (wie es bei Vektoren definiert ist) erhält man, wenn man zwischen die Listen einen Punkt setzt.	**{1,2,3}.{4,5,6}** 32
Ebenso werden Listen verwendet, um mehrere Elemente an einer Stelle einzugeben. Hier ist auch das Ergebnis eine Liste, die wiederum eine Liste mit zwei Elementen enthält (da beiden Variablen ein Wert zugewiesen werden muss).	**Solve[{x==0, y+x==2}, {x,y}]** {{x → 0, y → 2}}
Mehrere Ergebnisse werden auch in Listen zurückgegeben. In diesem Fall ist dies eine Liste, mit zwei Listen mit je einer Subsitutionsregel.	**Solve[x^2==4, x]** {{x → 2}, {x → -2}}

2.7. Matrizen

Matrizen sind in Mathematica nichts anderes als Listen von Listen.

Zur Eingabe von Matrizen verwendet man am Besten die Imput-Palette. Zusätzliche Zeilen werden dabei durch `Strg`+`Enter` und Spalten durch `Strg`+`Komma` angefügt.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

{{2, 6}, {1, 4}}

Als Ausgabe erhält man nicht eine Matrix, sondern eine Liste von Listen. Über `MatrixForm[...]` kann man aber die gewohnte Schreibweise wiederherstellen.

MatrixForm[{{2, 6}, {1, 4}}]

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Das gleiche Ergebnis liefert der hinten angestellte Befehl `//MatrixForm`. Generell lässt sich jedes Mathematicakommando, das nur ein Element in den eckigen Klammern erwartet, so verwenden.

{{2, 6}, {1, 4}} //MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

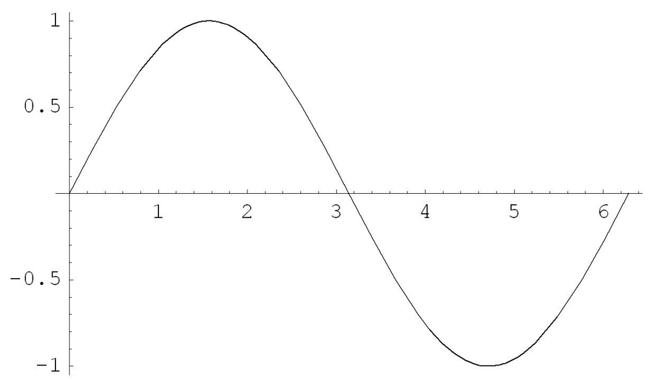
2.8. Grafiken

Grafiken sind in Mathematica nicht unbedingt schwer zu erstellen, die Eingabe ist aber mitunter etwas komplizierter.

Der Befehl für Grafiken lautet `Plot`. Dahinter folgt eine von einer Variablen abhängige Funktion und dann der gewünschte Wertebereich für die Variable in der Form `{Variable,von,bis}`.

Plot[Sin[x], {x,0,2π}];

Daraufhin sollte Mathematica diese Grafik ausgeben:

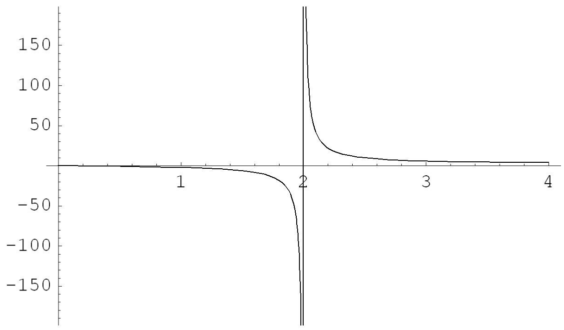


Bei der Erstellung von Grafiken versucht Mathematica selbstständig die Grafikparameter wie Ursprung, Wertebereich, usw. einzustellen. Dies gelingt nicht immer optimal, bzw. den momentanen Anforderungen entsprechend. Deshalb kann man eigene Wünsche in die Definition von Grafiken mit einbauen.

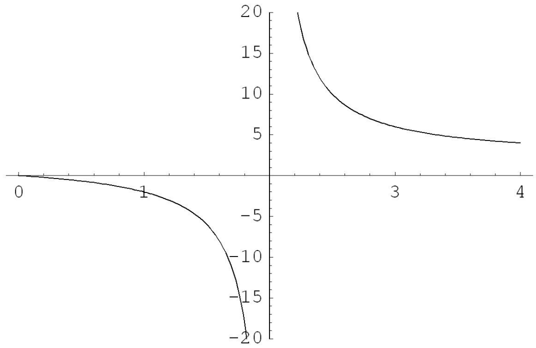
Wertebereich festlegen	**PlotRange → {von,bis}**
Ursprung verschieben	**AxesOrigin → {x,y}**
Auflösung verändern (Default = 25)	**PlotPoints → Zahl**

Das Ergebnis ist hier im direkten Vorher-Nacher Vergleich zu sehen.

Plot[$\frac{2x}{x-2}$, {x, 0, 4}]



Plot[$\frac{2x}{x-2}$, {x, 0, 4}, PlotRange → {-20, 20}, AxesOrigin → {2, 0}, PlotPoints → 200]



2.9. Packages

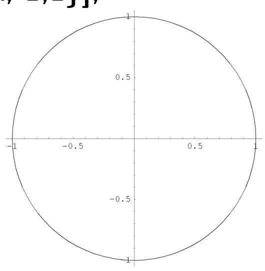
Nicht alle verwendbaren Kommandos werden beim Starten von Mathematica geladen, sondern lediglich eine Auswahl der wichtigsten.

Will man beispielsweise den exotischeren Befehl `ImplicitPlot` verwenden, so muss zuerst das entsprechende Package geladen werden.
(*Die zweite Variante bietet gewisse Vorteile*)

<< Graphics\`ImplicitPlot\`
oder
Needs["Graphics\`ImplicitPlot\`"]

Dann funktioniert der Befehl wie gewohnt.

ImplicitPlot[$x^2 + y^2$ == 1, {x,-1,1}];



Achtung: Hat man diesen Befehl eingegeben noch bevor das entsprechende Package geladen wurde, so funktioniert er auch danach nicht. Er muss erst mittels `Remove[ImplicitPlot]` (vgl. Kapitel 2.4 auf Seite 7) aus dem Gedächtnis von Mathematica entfernt werden.

3. Typische Fehler

Bevor im nächsten Kapitel praktische Anwendungen von Mathematica demonstriert werden, sei auf einige typische Fehler hingewiesen.

Ein Tipp vorneweg: Wenn es nicht mit zu viel Mühe verbunden ist und ein hier beschriebener Befehl einfach nicht funktionieren will, sollte man Mathematica neu starten und es von Anfang an neu probieren.

Der wohl häufigste Fehler ist, dass man unbewusst Variablen zuweist. In diesem Fall (`x = 4` statt `x==4`). Mathematica gibt nach der Fehlermeldung, dass 4 keine gültige Variable ist, den Term unausgewertet zurück, wobei x immer durch 4 ersetzt ist, da für Mathematica nun `x=4` ist.	**Solve[{x+y==1, x=4}, {x,y}]** General::ivar: 4 is not a valid variable. Solve[{4+y==1,4}, {4,y}]
Hat man den Fehler erkannt und ausgebessert, so funktioniert der Befehl aber weiterhin nicht. Es erscheint wieder der gleiche Fehler und der unausgewertete Ausdruck.	**Solve[{x+y==1, x==4}, {x,y}]** Solve[{4+y==1,True}, {4,y}]
Das Problem liegt darin, dass x den Wert 4 hat, und somit die Gleichung nicht nach x auflösbar ist, da gar kein x mehr existiert.	**x** 4
Erst nachdem x aus dem Gedächtnis von Mathematica entfernt wurde, funktioniert der Befehl wieder wie gewohnt.	**Remove[x]**;
Ein weiterer beliebter Fehler ist, dass Kommandos verwendet werden die gar nicht existieren. Hier will man die Ableitung des Logarithmus aus x bilden. Da Mathematica kein `log` kennt erhält man als Ergebnis die symbolische Ableitung dieser Variablen.	**D[log[x], x]** log'[x]
Bessert man diesen Schreibfehler aus (der Logarithum heißt in Mathematica `Log`), so erhält man die gewünschte Ableitung.	**D[Log[x], x]** $\frac{1}{x}$

Noch ein paar Tipps zum Umgang mit Variablen: Alle Mathematica-internen-Symbole und Befehle fangen mit Großbuchstaben an. Selbst vergebene Namen sollten also mit Kleinbuchstaben beginnen.

Als Variablennamen verwendet man am besten längere aussagekräftige Zeichenketten. Zusammengesetzte Symbole wie $\vec{a}$, $\bar{a}$, a_1 oder a_b, sollten vermeiden werden, da diese in Mathemtica anders abgespeichert werden und deshalb zu Komplikationen führen können. Eine Variable – vorzugsweise `x` – sollte niemals mit einem Wert belegt werden.

4. Praxis

Damit ist die trockene Theorie abgeschlossen. In diesem Kapitel wird beispielhaft die Aufgabe II des bayerischen LK-Abitur aus dem Jahr 2005 und ausgewählte Aufgaben aus Uni-Arbeitsblättern mit Mathematica gelöst.

An dieser Stelle sei nochmals auf die Mathematica-Befehlszusammenfassung[2] verwiesen, in der eine Auswahl wichtiger Kommandos von Mathematica systematische zusammengefasst sind. Nach aufmerksamer Lektüre dieser nun folgenden Beispiele sollte man alle Befehle richtig anwenden können.

4.1. Abituraufgabe Mathematik LK Bayern (Funktionsdiskussion)

Aufgabenstellung:
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \log \frac{-1}{1+x}$.

1. Bestimmen Sie den Definititionsbereich, die Nullstellen sowie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereiches.

2. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f.

3. Ermitteln Sie den Funktionsterm $f^{-1}(x)$.

4. Skizzieren Sie den Graphen der Funktionen f und f^{-1}

5. Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade x $= -1$ schließen im zweiten Quadranten ein sich ins Unendliche erstreckende Flächenstück ein. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.

Lösung:

zu 1.: Der Logarithmus ist nur für positive Werte definiert. Um diese Ungleichung zu lösen benötigen wir auch gleich ein zusätzliches Package.	**Needs["Algebra`InequalitySolve`"]**
Dann können wir den Definitionsbereich bestimmen. Folglich ist f nur für Werte kleiner als -1 definiert.	**InequalitySolve[$\frac{-1}{1+x} > 0$, x]** x < -1
Nun definieren wir die Funktion f. Falls direkt Werte eingesetzt werden sollen schreibt man `f[x_]` statt `f`.	**f = Log[$\frac{-1}{1+x}$];**

[2]Download unter: http://hometown.aol.de/schlurchern2/mathematica.htm

Die Nullstellen zu bestimmen ist jetzt nicht mehr schwer.

Solve[f==0, x]

{{x → -2}}

Für das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereiches berechnen wir einfach die jeweiligen Limita.

Limit[f, x → -1]

∞

Analoges gilt für die rechtsseitige Grenze. Mathematica gibt auch ohne Probleme den „Wert“ unendlich aus.

Limit[f, x → -∞]

$-\infty$

zu 2.: Dann berechnen wir die erste Ableitung nach der Variablen x und speichern diese gleich unter `fabl` ab.

fabl = D[f, x]

$\frac{-1-x}{(1+x)^2}$

Die erste Ableitung hat offensichtlich im Definitionsbereich keine Nullstelle, also ändert sich das Monotonieverhalten nicht. Einsetzten liefert, dass die Funktion stets monoton steigt (x darf kein Wert zugewiesen werden, deshalb verwenden wir eine Substitutionsregel).

fabl /. x → -2

1

zu 3.: Den Funktionsterm $f^{-1}(x)$ erhalten wir einfach indem wir die Gleichung `f == y` nach x auflösen. Das Ergebnis lässt sich nicht gleich in `fumk` abspeichern, da wir lediglich eine Substitutionsregel erhalten.

Solve[f == y, x]

{{x → $-e^{-y}(1+e^y)$}}

Um `fumk` zuzuweisen ist ein komplizierter Befehl notwendig. Wir weisen `fumk` `x` zu, wobei wir x durch obige Substitutionsregel ersetzten. Das Ergebnis von Solve enthält aber eine Klammer zuviel, die wir durch `Flatten` entfernen. Außerdem steht `%` für das letzte Ergebnis.

fumk = x /. Flatten[%]

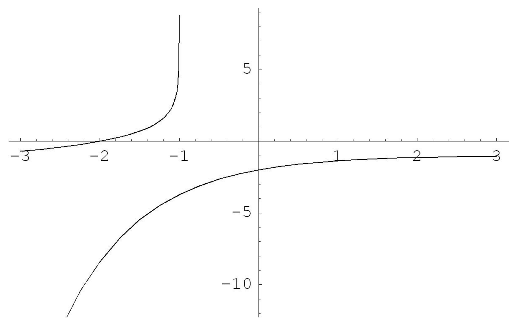
$-e^{-y}(1+e^y)$

Nun vertauschen wir noch y mit x in `fumk`.

fumk = fumk /. y → x;

zu 4.: Anschließend lassen wir den Graphen der Funktion im Bereich $[-3, 3]$ zeichnen. Um beide Graphen in ein Koordinatensystem zu zeichnen verwenden wir eine Liste.
Da die Funktion `f` nicht auf dem ganzen Bereich definiert und somit berechenbar ist, erhalten wir einige Hinweismeldungen, dann aber doch das korrekte Ergebnis.

Plot[{f,fumk}, {x,-3,3}];



zu 4.: Der gewünschte Flächeninhalt entspricht genau dem Integral von -2 bis -1 der Funktion f. Die Eingabe erfolgt wie gewohnt über die Input-Palette.

$\int_{-2}^{-1} f dx$

1

4.2. Matrizen (char. Polynom, Eigenwerte, Eigenvektoren, Inverses)

Aufgabenstellung:
Bestimmen Sie für die folgende Matrix das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Zuerst weisen wir `mat` die Matrix zu. Die Eingabe erfolgt über die Palette. Eine zusätzliche Spalte und Zeile wird durch `Strg`+`Komma` und `Strg`+`Enter` hinzugefügt.

mat $= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

{{4,0,1}, {-1,1,0}, {-2,0,1}}

Nun bestimmen wir das charakteristische Polynom, welches sich je nach Definition um den Faktor -1 unterscheiden kann.

CharacteristicPolynomial[mat,x]

$6 - 11x + 6x^2 - x^3$

Nun folgen die Eigenwerte. Da es drei Ergebnisse gibt, erfolgt die Ausgabe als Liste.

Eigenvalues[mat]

{3,2,1}

Dass diese mit den Nullstellen des char. Polynoms übereinstimmen wird bei einer Faktorisierung desselben offensichtlich.

Factor[$6 - 11x + 6x^2 - x^3$**]**

$-(-3+x)(-2+x)(-1+x)$

Zuletzt werden noch die Eigenvektoren ermittelt. Da es wieder mehrere Ergebnisse gibt und diese Vektoren sind, erfolgt die Ausgabe als verschachtelte Liste. `{-2,1,2}` ist sich dabei als Spaltenvektor vorzustellen.

Eigenvectors[mat]

{{-2,1,2},{-1,1,2},{0,1,0}}

Nicht explizit verlangt aber trotzdem immer wieder hilfreich ist die Bestimmung der Inversen Matrix.

Inverse[mat]

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

4.3. Matrizen (Determinante)

Aufgabenstellung:
Zeigen Sie dass für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$det \begin{pmatrix} x & y & 0 & 1 \\ -y & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -y \\ -1 & 0 & y & x \end{pmatrix} = (x^2 + y^2 + 1)^2$$

Lösung:

Zuerst werden alle bisher definierten Variablen aus dem Kernel ($\approx$ Gehirn von Mathematica) entfernt. Dies kommt in etwa einem Neustart des Programms gleich, außer dass eventuell geladene Packages erhalten bleiben.	**Remove["Global`*"]**
Dann wird obige Matrix unter der Variablen `mat` abgespeichert.	**mat**
Wir berechnen die Determinante der Matrix und weisen sie der Variablen `matdet` zu.	**matdet = Det[mat]** $1 + 2x^2 + x^4 + 2y^2 + 2x^2y^2 + y^4$
Nun lassen wir Mathematica die zu beweisende Gleichheit vereinfachen. Als Ergebnis erhalten wir lediglich `True` was anzeigt, dass die Gleichung stimmt.	**Simplify[matdet ==** $(x^2+y^2+1)^2$**]** True

4.4. Reihen (Berechnung des Reihenwertes)

Aufgabenstellung:
Berechnen sie den Reihenwert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\ e^{-kx^2}$$

Lösung:

Hier ist es schwerer die Summe korrekt in Mathematica einzugeben, als die Summe berechnen zu lassen. Zu beachten ist, dass die Eulersche Zahl durch eine großes E dargestellt wird und dass zwischen k und x ein Leerzeichen (also ein Malpunkt) gesetzt werden muss.	$\sum_{k=1}^{\infty} k\ E^{-k\ x^2}$ $\frac{e^{x^2}}{(-1+e^{x^2})^2}$

4.5. Potenzreihenentwicklung

Aufgabenstellung:
Geben sie die Potzenreihendarstellung der Funktion $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ um den Nullpunkt an.

Lösung:

Das Kommando für die Taylorentwicklung lautet `Series`. In der geschweiften Klammer stehen der Reihe nach durch Kommata getrennt Variable, Entwicklungspunkt und Genauigkeit der Entwicklung.

Series[$\frac{x}{E^x-1}$, {x,0,6}]

$\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^6}{480} + O(x)^7$

Mit dem Befehl *Normal* kann man das landausche O-Symbol in der Potenzreihenentwicklung entfernen und erhält so ein „normales“ Polynom.

Normal[%]

$\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^6}{480}$

Bei der Verwendung des Prozent-Symbols, das ja bekanntermaßen das letzte Ergebnis repräsentiert, ist Vorsicht geboten, da dieses sich immer auf die letzte Ausgabe von Mathematica und nicht auf die darüber liegende Zeile bezieht. Selbst wenn die letzte Ausgabe eine Fehlermeldung enthält, ist diese in % mit abgespeichert!

4.6. Ableitung (symbolisch)

Aufgabenstellung:
Man zeige, dass für

$$S(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$$

gilt

$$S'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x).$$

Lösung:

Der Befehl für die partielle Differenziation ist ein großes `D`, der im zweiten Argument die Variable nach der abgeleitet werden soll erwartet.
Dieses Beispiel zeigt sehr deutlich, dass Mathematica symbolisch rechnet.

D[$\int_{g[x]}^{h[x]} f[t]dt$, x]

$-f[g[x]]g'[x] + f[h[x]]h'[x]$

Ableitungen gewöhnlicher Funktionen berechnet Mathematica selbstverständlich ebenso.

D[5 x^2 + 3, x]

10 x

4.7. Differentialgleichungen

Aufgabenstellung:
Lösen Sie folgende Differentialgleichung:

$$y(x)' = xy(x)$$

Lösung:

Der Befehl zum symbolischen Lösen von Differentialgleichungen lautet `DSolve`. Danach ist durch Kommata getrennt die Differentialgleichung, die Funktion von der Ableitungen auftreten und nach was abgeleitet wird, anzugeben. Im Ergebnis steht $C[1]$ für eine Konstante.

DSolve[y'[x] == x y[x], y[x], x]

$$\{\{y[x] \to e^{\frac{x^2}{2}} C[1]\}\}$$

4.8. Dreidimensionale Grafiken

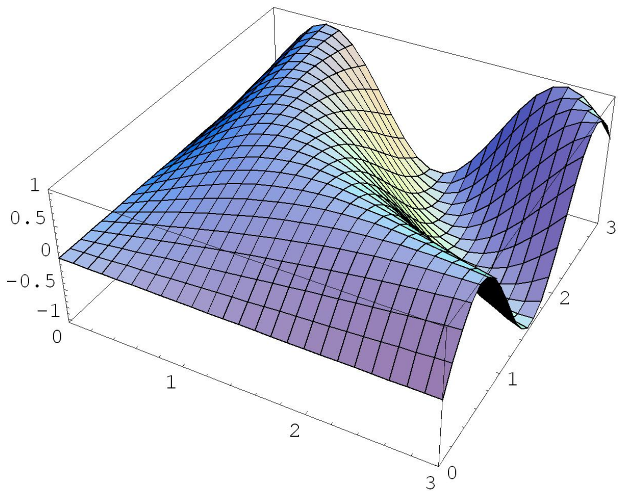
Aufgabenstellung:
Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch:

$$(x, y) \mapsto Sin(xy)$$

Die Funktion veranschaulicht man sich durch eine dreidimensionale Zeichnung. Der Befehl funktioniert analog zu dem im Zweidimensionalen. (*Siehe Kapitel 2.8 auf Seite 9*)

Plot3D[Sin[x y], {x,0,3}, {y,0,3}, PlotPoints → 20];

Dann erscheint diese Grafik:



A. Literaturverzeichnis

- Michael Kofler, Mathematica – Einführung, Anwendung, Referenz
- Stephen Wolfram, The Mathematica Book
- Mathematica Kurs des Universitätsrechenzentrum Heidelberg
  http://www.urz.uni-heidelberg.de/Ausbildung/Kurse/MathemBlk/PHY01/wkurs.pdf

Abschließend möchte ich mich bei Roman Geiselhart, Margarete Ziemek, Moritz Lenz und Thomas Fischer bedanken, da sie diese Einführung Korrektur gelesen haben und ich so die gröbsten Fehler beseitigen konnte.

Sollten noch weitere Fehler vorhanden sein, wäre ich für eine kurze Mitteilung dankbar. (*Email: schlurcher@gmx.net*)