3. Rechnen mit Vektoren

Wir formalisieren die Ergebnisse des letzten Kapitels. Wir legen stets ein **kartesisches Koordinatensystem** zugrunde.

A) Vektor-Operationen

Def. 1

Vektoren im $\mathbf{R}^2$ werden durch **geordnete Paare** dargestellt: $\underline{a} = (a_1 , a_2)$,
z.B. (7, -1) . $\underline{0} = (0 , 0)$ ist der **Nullvektor**.

Vektoren im $\mathbf{R}^3$ werden durch **geordnete Tripel** dargestellt: $\underline{a} = (a_1 , a_2 , a_3)$,
z.B. (0, -1, 2) . $\underline{0} = (0 , 0 , 0)$ ist der Nullvektor.

Die Zahlen a_i heißen (kartesische) **Koordinaten** des Vektors.

Bem.

Man kann auch den abstrakten n-dimensionalen Raum $\mathbf{R}^n$ (n BELIEBIG) betrachten, in dem Punkte durch n Koordinaten und entsprechend Vektoren durch ein **n-Tupel** $(a_1 ,a_2 ,...,a_n)$ beschrieben werden. Wo braucht man solche Vektoren?

- in der Physik (z.B. vierdimensionales Raumzeitkontinuum)
- In der Mathematik (z.B. bei Gleichungssystemen mit mehr als drei Unbekannten)

Alle nachfolgenden Ausführungen gelten auch für diese Vektoren. Mit $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ ist bei uns erst mal der $\mathbf{R}^{\mathbf{2}}$ bzw. der $\mathbf{R}^{\mathbf{3}}$ gemeint.

Def. 2

Zwei Vektoren sind gleich genau dann , wenn sie die gleichen Koordinaten haben. Also:

Sei $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

$\underline{a} = \underline{b} \Leftrightarrow a_i = b_i$ für alle i von 1 bis n (kurz: $i = 1, \dots, n$).

Beachte: **aus <u>einer</u> Vektorgleichung werden n Koordinatengleichungen**.

Bem.

Mathematisch gleiche Vektoren gehen durch Parallelverschiebung auseinander hervor.
In den Anwendungen können die verschiedenen Anfangspunkte von Bedeutung sein: wenn das der Fall ist, müssen solche Vektoren unterschieden werden.

Def. 3

1) **Skalare Multiplikation**:

Sei $\underline{a} \in \mathbf{R}^3$, $\lambda \in \mathbf{R}$ (λ ist eine reelle Zahl, also ein Skalar).

Dann ist der **Vektor** $\lambda \underline{a}$ definiert durch $(\lambda\, a_1 , \lambda\, a_2 , \lambda\, a_3)$; analog im $\mathbf{R}^2$.

2) **Vektoraddition**:

Sei $\underline{a} = (a_1 , a_2 , a_3)$ und $\underline{b} = (b_1, b_2 , b_3)$. Dann ist die **Summe** definiert durch den **Vektor** $\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , a_3 + b_3)$; analog im $\mathbf{R}^2$

Bem.

Wir gehen von „freien“ (verschiebbaren) Vektoren aus.

1) Die Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b} = \lambda\, \underline{a}$ sind **kollinear** , d.h. sie liegen auf einer Linie (oder können dorthin parallel verschoben werden; TM: gleiche Wirkungslinie). Sie heißen für

$\lambda > 0$: gleichgerichtet , (gleichsinnig) parallel

$\lambda < 0$: entgegengerichtet, (gegensinnig) parallel , antiparallel

2) **Zwei** Vektoren sind stets **komplanar**, d.h. sie liegen in einer Ebene oder können dorthin parallel verschoben werden. Wenn zwei Vektoren nicht kollinear sind, legen sie eine Ebene fest. Die **drei** Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}$ sind stets komplanar.

Satz 1

Seien $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbf{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Dann gelten für die oben def. Verknüpfungen:

$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ (**Kommutativgesetz für die Vektoraddition**)

$\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ (**Assoziativges. für die Vektoraddition**)

$\alpha\,(\beta\,\underline{a}) = (\alpha\,\beta)\,\underline{a}$ (**Assoziativges. für die skalare Mult.**)

$\alpha\,(\underline{a} + \underline{b}) = \alpha\,\underline{a} + \alpha\,\underline{b}$ (**Distributivges. für die skalare Mult**.)

Einige Anwendungen

1) Addition von gleichartigen vektoriellen Größen in der Physik

2) Seien $\underline{a}$ und $\underline{b}$ die Ortsvektoren zweier Punkte A und B .
Dann ist der Differenzvektor $\underline{b} - \underline{a}$ der Vektor von A nach B (kurz: $\underline{AB}$).

3) $\underline{r}(\lambda) = \underline{P} + \lambda\,\underline{a}$ beschreibt eine **Gerade** im $\mathbf{R}^n$.
$\underline{P}$ heißt Aufpunkt, $\underline{a}$ Richtungsvektor;
λ ist ein (reeller) Skalar und wird hier auch Parameter genannt.

Diese Darstellung einer Geraden heißt auch vektorielle (Parameter-) Darstellung.

4) $\underline{r}(\lambda_1, \lambda_2) = \underline{P} + \lambda_1\,\underline{a} + \lambda_2\,\underline{b}$ beschreibt eine **Ebene** im $\mathbf{R}^n$.
$\underline{P}$ heißt Aufpunkt, $\underline{a}$ und $\underline{b}$ sind die Richtungsvektoren
(sie „spannen die Ebene auf“).
λ_1 und λ_2 sind reelle Skalare und werden hier auch Parameter genannt.

Diese Darstellung einer Ebene heißt auch vektorielle (Parameter-) Darstellung.

B) Betrag eines Vektors; Einheitsvektoren

Def. 4

Sei $\underline{a}$ = (a_1, a_2, a_3) . | $\underline{a}$ | = $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ heißt **Betrag** (Länge) des Vektors.

Analog im $\mathbf{R}^n$. Der Betrag ist offensichtlich eine reelle **Zahl**, nämlich die Maßzahl der vektoriellen Größe.

Satz 2

1) Beträge sind nicht negativ: $|\underline{a}| > 0 \Leftrightarrow \underline{a} \neq \underline{0}$, $|\underline{a}| = 0 \Leftrightarrow \underline{a} = \underline{0}$

2) $|\lambda \underline{a}| = |\lambda| \ |\underline{a}|$ ($\lambda \in \mathbf{R}$)

3) $|\underline{a} + \underline{b}| \leq |\underline{a}| + |\underline{b}|$ (Dreiecksungleichung)

Def. 5

Der Vektor $\boldsymbol{\underline{e}_a := \underline{a} * 1/|\underline{a}|}$ = $\underline{a} / |\underline{a}|$ hat die Länge 1 , denn:

$| \underline{e}_a | = | \underline{a} / |\underline{a}| | = |\underline{a}| / || \underline{a} || = |\underline{a}| / | \underline{a} | = 1$.

Er zeigt in dieselbe Richtung wie $\underline{a}$. Man nennt ihn **<u>Einheits</u>vektor** in Richtung $\underline{a}$.
Man kann also schreiben: $\underline{a} = | \underline{a} | \underline{e}_a$.

Darin kommt noch einmal deutlich zum Ausdruck, daß ein Vektor durch Betrag und Richtung gegeben ist.
Ein Einheitsvektor ist sozusagen ein standardisierter Vektor zur Angabe einer Richtung.

Def. 6

Die Einheitsvektoren, die in die positiven Richtungen des (gewählten) kartesischen Koordinatensystems zeigen, heißen **kartesische Einheitsvektoren** (EV).

$\mathbf{R}^2$: $\underline{e}_x = (1, 0)$, $\underline{e}_y = (0, 1)$

$\mathbf{R}^3$: $\underline{e}_x = (1, 0, 0)$, $\underline{e}_y = (0, 1, 0)$, $\underline{e}_z = (0, 0, 1)$

Häufig werden die EV auch durchnummeriert: $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$;

Andere gebräuchliche Bezeichnung: $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ (mit Pfeilen: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)

$\mathbf{R}^n$: $\underline{e}_i$ = (0,0,...,0, **1** ,0,...,0) ; n Koordinaten: die **i** - te Koordinate ist 1 , alle anderen 0 .

Im Englischen wird $\underline{u}$ („unit vector") statt $\underline{e}$ benutzt.

Satz 3

Jeder Vektor $\underline{x} \in \mathbf{R}^n$ kann in der Form dargestellt werden

$$\underline{\mathbf{x}} = (x_1 , x_2 ,..., x_n) = x_1 \underline{e}_1 + ... + x_n \underline{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i .$$

Die Darstellung ist eindeutig. Man sagt: die kartesischen EV bilden eine **Basis** für den Vektorraum $\mathbf{R}^n$. Man sagt auch: sie spannen den $\mathbf{R}^n$ auf.

Der Vektor $x_i \underline{e}_i$ heißt i - te **kartesische Komponente** von $\underline{x}$. Oft wird auch die kartesische Koordinate x_i als kartesische Komponente bezeichnet.

Die Darstellung $\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + ... + x_n \underline{e}_n$ kann als „**Zerlegung**" des Vektors in seine kartesischen Komponenten aufgefasst werden.

C) Linearkombination von Vektoren

Def. 7

Gegeben sind die Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

Der Vektor $\underline{F} = \alpha\,\underline{a} + \beta\,\underline{b}$ heißt dann **<u>Linearkombination</u>** der Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

$\underline{F}_1 = \alpha\,\underline{a}$ heißt **Komponente** von $\underline{F}$ in Richtung von $\underline{a}$.

$\underline{F}_2 = \beta\,\underline{b}$ heißt Komponente von $\underline{F}$ in Richtung von $\underline{b}$.

Allgemein:

$\underline{F} = \lambda_1\,\underline{a}_1 + \dots + \lambda_n\,\underline{a}_n$ heißt Linearkombination der Vektoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$.

$\underline{x} = x_1\,\underline{e}_1 + \dots + x_n\,\underline{e}_n$ stellt den Vektor $\underline{x}$ als Linearkombination der kartesischen Einheitsvektoren dar (das geht immer!)

Sei $\underline{\mathbf{0}} = \alpha_1\,\underline{a}_1 + \dots + \alpha_n\,\underline{a}_n$, wobei nicht alle α_i Null sein dürfen. Dann nennt man dies eine **nicht-triviale Darstellung des Nullvektors.** Eine triviale Darstellung liegt vor, wenn alle α_i Null sind.

Sei z.B. $\alpha_n \neq 0$ (und dann zwangsläufig mindestens noch ein weiteres α_k):

$\underline{\mathbf{0}} = \alpha_1\,\underline{a}_1 + \dots + \alpha_n\,\underline{a}_n \Rightarrow \underline{a}_n = \lambda_1\,\underline{a}_1 + \dots + \lambda_{n-1}\,\underline{a}_{n-1}$ $(\lambda_i = -\alpha_i / \alpha_n)$.

$\underline{a}_n$ läßt sich dann also als Linearkombination der andere Vektoren darstellen.

Satz 4

Gegeben sind die Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{F}$. Gesucht ist die Darstellung von $\underline{F}$ als Linearkombination der Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$, also $\underline{F} = \alpha\,\underline{a} + \beta\,\underline{b}$. Man sagt auch: “ $\underline{F}$ wird in Komponenten mit (durch $\underline{a}$ und $\underline{b}$) vorgegebenen Richtungen **zerlegt** “ .

Das Gleichungssystem für die gesuchten Unbekannten α und β heißt **lineares Gleichungssystem**.

Wir setzen jetzt voraus, dass **<u>a</u> und <u>b</u> <u>nicht kollinear</u>** sind (bei praktischen Zerlegungsaufgaben wird das der Fall sein). Dann hat das Gleichungssystem eine (eindeutige) Lösung, wenn die drei Vektoren komplanar sind. Im $\mathbf{R}^2$ hat es also immer eine Lösung.

Def. 8

Sind $\underline{a}$ und $\underline{b}$ kollinear , nennt man sie **linear abhängig**. Denn dann existiert eine Linearkombination $\underline{b} = \lambda\, \underline{a}$. Andernfalls heißen die Vektoren <u>linear unabhängig</u> .
Die Linearkombination $\underline{b} = \lambda\, \underline{a}$ man auch so schreiben kann: $\underline{\mathbf{0}} = \lambda\, \underline{a} - \underline{b}$, also als nicht-triviale Darstellung des Nullvektors**.**

Die <u>drei</u> Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ heißen linear abhängig, wenn zwei dieser Vektoren, z.B. $\underline{a}$ und $\underline{b}$, kollinear sind. Denn dann existiert eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors $\underline{\mathbf{0}} = \underline{b} - \lambda\, \underline{a} + 0\, \underline{c}$. Sind keine zwei Vektoren kollinear und die drei Vektoren aber dennoch komplanar, existiert die Linearkombination $\underline{c} = \lambda_1\, \underline{a} + \lambda_2\, \underline{b}$ und damit eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors existiert: $\underline{\mathbf{0}} = \lambda_1\, \underline{a} + \lambda_2\, \underline{b} - \underline{c}$. Die drei Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ heißen linear abhängig.

Allgemein:
Die Vektoren $\underline{a}_1 , \ldots , \underline{a}_n$ sind dann linear abhängig, wenn man mit ihnen den Nullvektor nicht-trivial darstellen kann.

Bem.
Die kartesischen Einheitsvektoren $\underline{e}_1 , \underline{e}_2, \ldots , \underline{e}_n$ im R^n sind linear unabhängig.