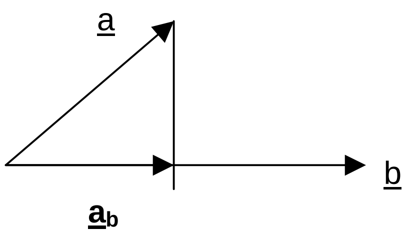
## 4. Skalarprodukt zweier Vektoren

### A) Einleitung: Projektion von Vektoren

**Def. 0**

Gegeben sind die Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ . Die **Projektion** $\underline{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}$ von $\underline{a}$ **auf** $\underline{b}$ erhält man, indem man von der Spitze von $\underline{a}$ eine Linie zieht, die senkrecht auf $\underline{b}$ steht.



## B) Definition des Skalarprodukts im R$^{2}$

**Def. 1**

Seien $\underline{a}$ und $\underline{b}$ Vektoren im $\mathbf{R}^2$ . Als **Skalarprodukt** $\underline{\mathbf{a}} \bullet \underline{\mathbf{b}}$ definiert man die reelle Zahl (also den Skalar) $|\,\underline{a}\,|\;|\,\underline{b}\,|\;\cos\varphi$ .

$\varphi$ ist der von den Vektoren eingeschlossene Winkel, wobei $\mathbf{0} \leq \varphi \leq \pi$ !

Hier muß man zur Berechnung des Skalarprodukts den Winkel kennen.

## C) Berechnung des Skalarprodukts ohne Kenntnis des Winkels

**Satz 1** (Eigenschaften des Skalarprodukts; gelten im $\mathbf{R}^n$ )

1) $\underline{a} \bullet \underline{b} = \underline{b} \bullet \underline{a}$ (Kommutativgesetz)

2) Sei $\lambda \in \mathbf{R}$ : $(\lambda \underline{a}) \bullet \underline{b} = \lambda (\underline{a} \bullet \underline{b}) = \underline{a} \bullet (\lambda \underline{b})$

3) $\underline{a} \bullet (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \bullet \underline{b} + \underline{a} \bullet \underline{c}$ (Distributivgesetz)

4) Aus der Def. 1 folgt unmittelbar: (sind $\underline{a}$ , $\underline{b}$ beide nicht der Nullvektor und)
$\underline{a} \bullet \underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a}$ und $\underline{b}$ stehen senkrecht aufeinander.
**Das Skalarprodukt testet auf Orthogonalität.**

**Satz 2** (Koordinatendarstellung im $\mathbf{R}^2$ )

Sei $\underline{a} = (a_x , a_y) = a_x \underline{e}_x + a_y \underline{e}_y$ , $\underline{b} = (b_x , b_y) = b_x \underline{e}_x + b_y \underline{e}_y$.

Dann gilt: $\boldsymbol{\underline{a} \bullet \underline{b} = a_x b_x + a_y b_y}$ .

Jetzt kann man den eingeschlossenen Winkel berechnen (!) :

$$\cos\varphi = \frac{\underline{a} \bullet \underline{b}}{|\underline{a}|\ |\underline{b}|} \quad => \quad \varphi = \arccos \left( \frac{\underline{a} \bullet \underline{b}}{|\underline{a}|\ |\underline{b}|} \right)$$

**Satz 3** (Koordinatendarstellung im $\mathbf{R}^n$ )

Im $\mathbf{R}^3$ gilt: $\underline{a} \bullet \underline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\underline{a}|\ |\underline{b}| \cos\varphi$
[so kann man den Winkel zwischen den Vektoren berechnen].

Im $\mathbf{R}^n$ gilt: $\underline{a} \bullet \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

$=: |\underline{a}|\ |\underline{b}| \cos\varphi$ [so kann man den Winkel definieren].

**D) einige Anwendungen des Skalarprodukts**

0) Wenn in der Aufgabe Winkel zwischen Vektoren auftreten, kann das Skalarprodukt nützlich sein.

1) $\underline{a} \cdot \underline{e}_i = a_i$ (das Skalarprodukt mit dem i-ten kartesischen Einheitsvektor liefert die i-te kartesische Koordinate).

2) Für den Betrag eines Vektors gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$ (kompakte Schreibweise für den „Pythagoras")

3) Für die Projektion $\underline{a}_b$ von $\underline{a}$ auf $\underline{b}$ gilt ($\underline{e}_b$ ist der Einheitsvektor in Richtung $\underline{b}$ ) :

$\underline{a}_b = |\underline{a}| \cos\varphi \; \underline{e}_b$ ( s. Skizze in Def. 0 ! )

$$= |\underline{a}| \frac{\underline{a} \bullet \underline{b}}{|\underline{a}| \; |\underline{b}|} \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|} = \frac{\underline{a} \bullet \underline{b}}{\underline{b} \bullet \underline{b}} \underline{b}$$

( $\cos\varphi$ aus Satz 2 , $\underline{e}_b = \underline{b} / |\underline{b}|$ ).

4) Für die (mechanische) Arbeit gilt: $W = \underline{F} \bullet \underline{s}$ . $\underline{F}$ bezeichnet die Kraft, die am Körper angreift, $\underline{s}$ den vom Körper zurückgelegten Weg.

5) Auflösen einer Vektorgleichung nach einem skalaren Parameter, z.B.:

(*) $\underline{r} = \underline{P} + t\,\underline{v}$ ;

Skalarprodukt der Gl. (*) mit $\underline{v}$ :

$\underline{r} \bullet \underline{v} = \underline{P} \bullet \underline{v} + t\,\underline{v} \bullet \underline{v} \;\Rightarrow\; t = ( \underline{r} \bullet \underline{v} - \underline{P} \bullet \underline{v} ) / \underline{v} \bullet \underline{v} = ( \underline{r} - \underline{P} ) \bullet \underline{v} \;/\; \underline{v} \bullet \underline{v}$

6) Herleitung geometrischer Sachverhalte, z.B.: Satz des Thales , Cosinus-Satz

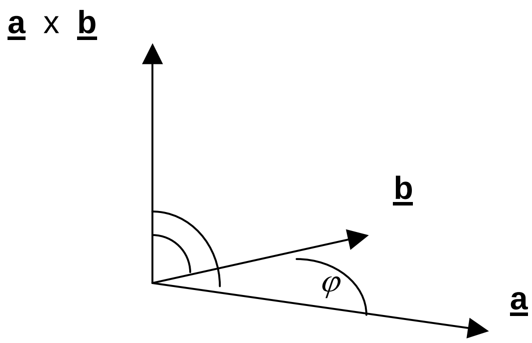
## 5. Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

**Def. 1**

**Nur im $R^3$** ist das **Vektorprodukt (Kreuzprodukt)** $\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}$ wie folgt definiert:

a) Der Vektor $\underline{a} \times \underline{b}$ steht senkrecht auf $\underline{a}$ und $\underline{b}$, und zwar so, daß $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{a} \times \underline{b}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden .

b) Für den Betrag gilt: $|\, \underline{a} \times \underline{b} \,| = |\underline{a}|\ |\underline{b}| \sin\varphi$ , $\varphi$ ist der eingeschlossene Winkel.




**Bspl.** (aus der Physik)

$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$ Drehmoment einer Kraft $\underline{F}$

$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$ Drehimpuls

$\underline{v} = \underline{w} \times \underline{r}$ Bahngeschw. einer Drehbewegung

$\underline{F} = q\, \underline{v} \times \underline{B}$ Kraft auf eine Ladung q mit Geschw. v im Magnetfeld B

**Satz 1** (geometrische Interpretation)

1) | $\underline{a} \times \underline{b}$ | ist der Flächeninhalt des von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

2) Sind $\underline{a}$ und $\underline{b}$ kollinear, ist das Kreuzprodukt der Nullvektor;
insbesondere: $\underline{a} \times \underline{a} = \underline{0}$ .

**Satz 2** (Eigenschaften des Vektorprodukts)

1) $\underline{a} \times \underline{b} = - \underline{b} \times \underline{a}$ (**anti**kommutativ, da negatives Vorzeichen)

2) Sei $\alpha \in \mathbf{R}$; $\alpha\ (\underline{a} \times \underline{b}) = (\alpha\ \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\alpha\ \underline{b})$
Auch $\alpha\ (\underline{a} \times \underline{b})$ ist natürlich senkrecht zu $\underline{a}$ und $\underline{b}$ .

3) $\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$ (Distributivgesetz)

4) Das Vektorprodukt ist nicht assoziativ.
Bspl: $\underline{e}_x \times (\underline{e}_x \times \underline{e}_y) = \underline{e}_x \times \underline{e}_z = - \underline{e}_y$ aber $(\underline{e}_x \times \underline{e}_x) \times \underline{e}_y = \underline{0}$
Es gilt aber der sog. Entwicklungssatz : $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}\,(\underline{a} \bullet \underline{c}) - \underline{c}\,(\underline{a} \bullet \underline{b})$ .

Bei Vektoren, die beliebig im $\mathbf{R}^3$ liegen, ist es nicht immer leicht, geometrisch $\underline{a} \times \underline{b}$ zu ermitteln. Dabei hilft dann:.

**Satz 3** (Koordinatendarstellung)
Sei $\underline{a} = (a_x , a_y , a_z)$ , $\underline{b} = (b_x , b_y , b_z)$ . Dann gilt:

$\underline{a} \times \underline{b} = (a_y b_z - a_z b_y , a_z b_x - a_x b_z , a_x b_y - a_y b_x)$

**Einige Anwendungen des Kreuzprodukts**

1) Konstruktion eines Vektors, der senkrecht auf zwei anderen steht (s.o.)
2) Viele physikalische Größen sind als Kreuzprodukt definiert (s.o.) .
3) Geometrische Anwendungen, z.B. Flächenberechnung (s.o.)

**Def. 2**

Das gemischte Produkt $\underline{a} \bullet (\underline{b} \times \underline{c})$ heißt Spatprodukt.

**Satz 4**

1) Der Betrag des Spatprodukts liefert das Volumen des von den drei Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ aufgespannten Körpers. Dieser stellt ein Parallelepiped dar und wird auch Spat genannt.

2) Das Spatprodukt ist daher Null, wenn alle drei Vektoren in einer Ebene liegen: **es testet auf Komplanarität.**

3) $\underline{a} \bullet (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b}) \bullet \underline{c}$ .

Daher benutzt man auch die Abkürzung : $[\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}]$ .

Ferner gilt: $[\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}] = [\underline{b}\ \underline{c}\ \underline{a}] = [\underline{c}\ \underline{a}\ \underline{b}]$

(zyklisches Vertauschen der Vektoren)

4) In der Koordinatendarstellung erhält man durch Ausrechnen:

$$\underline{a} \bullet (\underline{b} \times \underline{c}) = a_x\ (b_y c_z - b_z c_y) + a_y\ (b_z c_x - b_x c_z) + a_z\ (b_x c_y - b_y c_x)\ .$$

Die rechte Seite kann man auch durch das folgende Schema darstellen:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Ein solches Schema nennt man eine 3 x 3 - Determinante. Die Auswertung dieser Determinante erfolgt nach der „Determinanten“-Regel , die wir schon beim Vektorprodukt kennengelernt haben, und liefert dann den obigen Ausdruck. Bem.: das Vektorprodukt sieht nur aus wie eine Determinante, das Spatprodukt ist eine Determinante.