<u>Vektoralgebra</u>

<u>1. Einführung</u>

A) Der Vektorbegriff

<u>Skalar:</u>

Größe, die allein durch eine **Zahlenangabe** definiert ist.

Bspl. : die reellen Zahlen; die komplexen Zahlen;

Temperatur, Masse, Zugriffszeit auf Festplatte, Speichergröße:

diese Größen haben neben der Maßzahl noch eine Maßeinheit (Dimension)

<u>Vektor:</u>

neben der Angabe einer Zahl ist **auch die Angabe einer Richtung** notwendig ist.

Bspl. : Geschwindigkeit eines Körpers; Bez.: $\underline{v}$, $\vec{v}$

Kraft, die auf einen Körper wirkt; Bez.: $\underline{F}$, $\vec{F}$

Ortsvektor $\underline{r}$, Beschleunigung $\underline{a}$, elektrisches Feld $\underline{E}$

Anschaulich stellt man Vektoren durch einen **Pfeil** dar:

darin kommen Maßzahl (Länge des Pfeils = Länge des Vektors = Betrag des Vektors) und Richtung zum Ausdruck.

Vektoren mit gleicher Länge und gleicher Richtung sind gleich.

Bem.

1) In den **Anwendungen** (Physik, Mechanik, Vektorgrafik, Geometrie) ist es oft notwendig, den **Anfangspunkt** (Aufpunkt, Angriffspunkt) eines Vektors anzugeben: solch ein Vektor ist an seinem Aufpunkt „festgemacht“ und darf nicht (oder nur in gewisser Weise) verschoben werden.

In den **Anwendungen** (Physik, Mechanik, Vektorgrafik) ist es auch oft notwendig, den **Anfangspunkt** (Aufpunkt, Angriffspunkt) eines Vektors anzugeben.

2) Es folgt die anschauliche Einführung der Vektoroperationen „Addition“ und „skalare Multiplikation“

<u>2. Kartesische Koordinaten</u>

A) Zweidimensional

Wir führen ein zweidimensionales **kartesisches Koordinatensystem** (KO) ein

----> Bild a

In einem KO läßt sich die **Lage eines Punktes** durch Angabe zweier reeller Zahlen beschreiben, hier x_p und y_p genannt (wählt man ein anderes KO, erhält man andere Zahlen)

----> Bild b

Die beiden reellen Zahlen fasst man zu einem **<u>Paar</u>** **(x_p , y_p)** zusammen.

Punkt und Paar werden identifiziert (gleichgesetzt): **$P = (x_p , y_p)$** .

Die erste Zahl in dem Paar nennt man hier die **x - Koordinate**,
die zweite Zahl die **y - Koordinate**.

Das Paar (x_p , y_p) ist dabei vom Paar (y_p , x_p) zu unterscheiden, z.B. (2, 3) von (3, 2) .

----> Bild c

Man nennt ein solches Paar deshalb **geordnet**.

Die Menge aller Paare (x , y) mit $x \in \mathbf{R}$ und $y \in \mathbf{R}$ nennt man den **zweidimensionalen Raum $\mathbf{R}^2$** . Eine Konkretisierung dieses Raumes ist der zweidimensionale Anschauungsraum, also eine Ebene.

Wir können die kartesischen Koordinaten zur Darstellung von Vektoren benutzen:

Bspl.

Ortsvektor $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}}$ eines Punktes P im $\mathbf{R}^2$: Er beginnt im Ursprung des KO und endet im Punkt P .

----> BILD d

Das **Paar (x_p , y_p)** und der Vektor $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}}$ geben beide die Lage des Punktes P (in diesem KO) an. Daher kann man die Koordinaten des Punktes verwenden, um den Vektor zu **beschreiben**:

$$\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}} = (x_p , y_p) \text{ ; andere Schreibweisen : } \quad \underline{\mathbf{OP}} \text{ , } \underline{\mathbf{P}}$$

Für die **Länge des Vektors** , auch Betrag genannt (Symbol: $|\ \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}}\ |$), gilt laut Pythagoras:

$$|\ \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}}\ | = \sqrt{x_p^{\ 2} + y_p^{\ 2}}$$

Es sollen jetzt beliebige Vektoren und die Vektoroperationen durch Koordinaten beschrieben werden. Die Koordinaten sind stets relativ zum Aufpunkt. Wenn nichts anderes gesagt ist, ist der Aufpunkt beliebig, z.B. der Ursprung des Koordinaten-systems.

Die Ergebnisse werden im Abschnitt 3 formalisíert

Bspl.

B) Dreidimensional

Die gleichen Überlegungen kann man im **dreidimensionalen Raum $\mathbf{R}^3$** (Konkretisierung, geom. Interpretation: der dreidimensionale Anschauungsraum) anstellen.

Ortsvektor $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}}$ eines Punktes P im $\mathbf{R}^3$

----> BILD

Das **Tripel** $(\mathbf{x_p}, \mathbf{y_p}, \mathbf{z_p})$ und der Vektor $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}}$ geben beide die Lage des Punktes P (in diesem KO) an. Daher kann man die Koordinaten des Punktes verwenden, um den Vektor zu **<u>beschreiben</u>**:

$\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}} = (\mathbf{x_p}, \mathbf{y_p}, \mathbf{z_p})$; andere Schreibweisen : $\underline{\mathbf{OP}}$, $\underline{\mathbf{P}}$

Für die **Länge des Vektors** , auch Betrag genannt (Symbol: $|\, \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}} \,|$) , gilt laut Pythagoras:

$$|\, \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}} \,| = \sqrt{x_p^{\;2} + y_p^{\;2} + z_p^{\;2}}$$

Die Durchführung der Vektoroperationen ist analog zum $\mathbf{R}^2$ (graphisch: schwieriger zu zeichnen; in Koordinaten: kein Problem, s. nächstes Kap.).

C) Bezeichnungen

Es gibt viele Möglichkeiten, einen Vektor im Druck zu kennzeichnen:

$\underline{\mathbf{a}}$ oder $\vec{a}$ oder **a** (nur fettgedruckt) oder **a** („gothic“)

Es gibt viele Möglichkeiten, einen Vektor zu bezeichnen:

$\underline{r}_1 = (x_1 , y_1 , z_1)$ (Ortsvektor von P_1) ; andere Bezeichnung: $\underline{P}_1$

$\underline{r}_2 = (x_2 , y_2 , z_2)$ (Ortsvektor von P_2) ; andere Bezeichnung: $\underline{P}_2$

$\underline{a} = (a_x , a_y , a_z)$ (ein anderer Vektor)

Oft ist es zweckmäßig, die Koordinaten durchzunummerieren: $\underline{x} = (x_1 , x_2 , x_3)$

Dann kann man nämlich ganz allgemein von der **i - ten Koordinate** $\mathbf{x_i}$ sprechen.

Oft ist auch die <u>Spaltenschreibweise</u> zweckmäßig; **Bspl.** $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

Geometrie:

<u>**AB**</u> ist der Vektor von Punkt A (mit Ortsvektor $\underline{\mathbf{r}}_A$) zu Punkt B (mit Ortsvektor $\underline{\mathbf{r}}_B$)