4. Die trigonometrischen Funktionen und ihre Umkehrfunktionen

A) Definition der trigonometrischen Funktionen: sin( ), cos( ), tan( ) , cot( )

1) 0 < α < 90°, also **spitzer Winkel**: Definition über das **rechtwinklige Dreieck**;

$$\sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete\_des\_Winkels}{Hypotenuse}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{Ankathete\_des\_Winkels}{Hypotenuse}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete\_des\_Winkels}{Ankathete} = \sin(\alpha) / \cos(\alpha)$$

$$\cot(\alpha) = \frac{Ankathete\_des\_Winkels}{Gegenkathete} = 1/ \tan(\alpha)$$

Bem.: in der Mathematik läßt man die Klammern um das Argument dieser Funktionen häufig weg. In Programmiersprachen z.B. sind Klammern erforderlich!

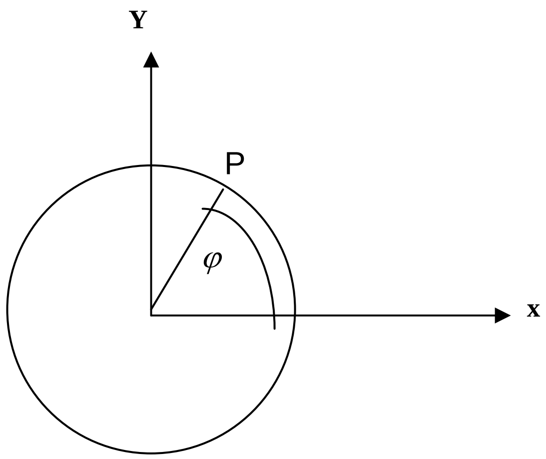
Spezielle Werte:

α	sin(α)	cos(α)
30°	½ $\sqrt{1}$	½ $\sqrt{3}$
45°	½ $\sqrt{2}$	½ $\sqrt{2}$
60°	½ $\sqrt{3}$	½ $\sqrt{1}$

Vorschlag:

Lassen Sie in den Berechnungen exakte Ausdrücke wie ½ $\sqrt{3}$ stehen; oft kann man noch Umformungen durchführen wie Kürzen, Multiplizieren, etc. . Erst zum Schluss setzt man numerische Werte dafür ein.

2) **0** $\leq \varphi \leq$ **360°** : Definition über den **Einheitskreis** (= Kreis im kartesischen Koordinatensystem (x, y) mit Mittelpunkt (0,0) und Radius r = 1);



Hypotenuse = r = 1 : $\sin(\varphi) = y / r = y$, $\cos(\varphi) = x / r = x$;

Daraus folgt unmittelbar die Darstellung der kartesischen Koordinaten eines beliebigen Punktes P in **Polarkoordinaten** : $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$

Spezielle Werte:

φ	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$
0°	0	1
90°	1	0
180°	0	-1
270°	-1	0
360°	0	1

Vorzeichen:

	1. Quadrant	2. Q.	3.Q.	4.Q.
sin:	**+**	**+**	**-**	**-**
cos:	**+**	**-**	**-**	**+**

Es gilt wieder: $\tan(\varphi) = \sin(\varphi) / \cos(\varphi)$

$\cot(\varphi) = 1/ \tan(\varphi)$

3) Einführung des **Bogenmaßes** : $\widehat{\varphi}$ (Winkel im Bogenmaß) = $\frac{2\pi}{360}\varphi$ (Winkel in Grad) ;

es ist zwingend für die weitere mathematische Behandlung der Funktionen, z.B. gilt der folgende Sachverhalt <u>nur</u> im Bogenmaß : $\sin\widehat{\varphi} \approx \widehat{\varphi}$ für kleine $|\widehat{\varphi}|$.

Benutzen Sie das Gradmaß nur, wenn es in der Aufgabe um Winkel geht.

Bem.: (exakte) **Länge des Kreisbogens** (Radius r , Öffnungswinkel $\widehat{\varphi}$) : r $\widehat{\varphi}$

4) Über das Intervall $[0, 2\pi]$ hinaus werden die Funktionen durch **periodische Fortsetzung** definiert, mit der Periode p = 2π (---> Umdruck) :

$\sin(x + \mathbf{n}\, 2\pi) = \sin(x)$ sowie $\cos(x + \mathbf{n}\, 2\pi) = \cos(x)$ wobei $n \in \mathbf{Z}$.

Um auch **nicht-geometrische Anwendungen** zu behandeln, heißt das **Argument jetzt x .**

Geometrische Interpretation der periodischen Fortsetzung: der Winkel wird über 360° hinausgedreht; ein Winkel 360° + α ist aber geometrisch vom Winkel α nicht zu unterscheiden.

Die Definition enthält auch **negative Werte für x** !

Negative <u>Winkel</u> werden <u>im</u> Uhrzeigersinn gezählt, z.B. : **-** 40° entspricht + 320° .

Daher die **Symmetrie**: $\sin(-x) = -\sin(x)$ (**ungrade Fkt**)

$\cos(-x) = \cos(x)$ (**gerade Fkt**)

Nullstellen: $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 + n\pi$

$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = n\pi$

Es gilt wieder: $\tan(x) = \sin(x) / \cos(x)$

$\cot(x) = 1 / \tan(x)$

Diese Funktionen haben **Polstellen** ! Sie haben die Periode π ! (---> Umdruck)

B) Beziehungen

Es gelten eine Fülle von Beziehungen: **---> Formelsammlung**.
Einige wichtige seien genannt:

a) $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$

(sog. **Additionstheoreme**)

$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

b) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (Pythagoras !)

c) $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$ [um $+\pi/2$, also nach rechts, verschobener Cosinus]

$\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ [um $-\pi/2$, also nach links, verschobener Sinus]

d) $\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

e) Die Summe von Sinus- und Cosinus-Funktion mit gleichem Argument kann als ein **verschobener Sinus** geschrieben werden (oder wahlweise als ein verschobener Cosinus mit Hilfe von Beziehung (c)) :

$A \cos(x) + B \sin(x) = C \sin(x+\alpha)$, wobei $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\tan(\alpha) = A / B$

Die folgenden Formeln unterscheiden sich von der vorhergehenden nur in den Bezeichnungen:

$a \sin(x) + b \cos(x) = c \sin(x+\alpha)$, wobei $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan(\alpha) = b / a$

$a \sin(x) + b \cos(x) = c \sin(x - \varphi)$, wobei $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan(\varphi) = - b / a$

C) Def. der trigonometrischen Umkehrfunktionen:

Bspl.

$y = \cos(\pi/4)$, $y = ??$ Antwort: $y = \sqrt{2}/2$

Umkehrung: $\cos(x) = \sqrt{2}/2$, $x = ??$

Der Funktionsverlauf zeigt, daß es **unendlich viele Lösungen** gibt.

Eine Lösung erhält man über die Umkehrfunktion, **arccos( )** oder **$\cos^{-1}$ ( )**

genannt: $x = \arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$ ist die Lösung **im Intervall $[0, \pi]$** .

$x = \pi/4$ ist derjenige Winkel (im Bogenmaß; Bogen = arcus), dessen Cosinus den Wert $\sqrt{2}/2$ hat.

Setze $x_1 = \pi/4$. **Die anderen Lösungen ergeben sich durch Überlegen (Symmetrien im Einheitskreis, periodischer Funktionsverlauf):**

$x_2 = (7/4)\pi$ (Symmetrie) sowie $x_1 + n\,2\pi$ und $x_2 + n\,2\pi$ (Periodizität, $n \in \mathbf{Z}$) .

Allgemein:

Die trigonometrischen Funktionen sind **nicht eineindeutig**. Sie sind allerdings **abschnittsweise streng monoton** und in diesen Intervallen auch jeweils umkehrbar. Grundsätzlich könnte man in jedem dieser Intervalle eine eigene Umkehrfunktion definieren. Man hat sich aber für jede trigonometrische Funktion auf ein "Hauptintervall" geeinigt (sog. **Hauptwert**). Dieser Hauptwert ist eine Teilmenge des Definitionsbereichs.

Funktion $y = f(x)$	Hauptwert	Werteber.	Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$
$y = \sin(x)$	$-\pi/2 \le x \le \pi/2$	$-1 \le y \le 1$	$x = \arcsin(y)$
$y = \cos(x)$	$0 \le x \le \pi$	$-1 \le y \le 1$	$x = \arccos(y)$
$y = \tan(x)$	$-\pi/2 < x < \pi/2$	$\mathbf{R}$	$x = \arctan(y)$
$y = \cot(x)$	$0 < x < \pi$	$\mathbf{R}$	$x = \text{arccot}(y)$

Nach der Vertauschung von x und y ergibt sich wieder die "gewohnte" Def. von $y = f^{-1}(x)$. Der Hauptwert stellt jetzt die möglichen Funktionswerte von $y = f^{-1}(x)$ dar: ein Taschenrechner liefert einen solchen Winkel im Bogenmaß (EINSTELLEN !!), wenn man x eingibt. Der Wertebereich von f(x) wird zum Definitionsbereich von $f^{-1}(x)$:

(Umkehr-) Fkt $y = f^{-1}(x)$	Definitionsbereich (von $y = f^{-1}(x)$)	Hauptwert (= Wertebereich von $y = f^{-1}(x)$)	
$y = \arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$	
$y = \arccos(x) = \cos^{-1}(x)$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$	**etc.**

Legende:
Das Argument von arcsin (x) ist ein zulässiger sinus-Wert. Der Funktionswert ist ein Winkel, und zwar derjenige Winkel (im Bogenmaß; arcus = Bogen), dessen Sinus den Wert x hat und im Hauptintervall liegt; **etc.**

Bspl.

a) $\sin(x) = -1/2 \quad \Rightarrow \quad x = \arcsin(-1/2) = -\pi/6$ ist die Lösung **im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$.**

Formal erfolgt die Auflösung nach x durch Anwendung der Umkehrfkt auf beide Seiten:

$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(-1/2)$ (f und f^{-1} heben sich auf:) $\Rightarrow$

$x = \arcsin(-1/2) = -\pi/6$ (im Hauptwertbereich !!).

Die arcsin-**Funktion** liefert (natürlich) einen eindeutigen Funktionswert. Es gehen dabei aber Lösungen der Ausgangsgleichung verloren! **Diese anderen Lösungen der Gleichung** ergeben sich durch Überlegen (Symmetrie, Periodizität).

b) $\arcsin(x) = \pi/3 \Rightarrow x = \sin(\pi/3) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Formal erfolgt die Auflösung nach x durch Anwendung der Umkehrfkt auf beide Seiten:

$\sin(\arcsin(x)) = \sin(\pi/3)$

$x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. **Dies ist die einzige Lösung der Gleichung!**

5. Exponential- und Logarithmus- Funktionen

A) Definitionen:

Def. 1: **$f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)** heißt **Exponential – Funktion.**

Satz 1 (vergleiche Sätze über Potenzen) :

(1) $a^{x+y} = a^x * a^y$

(2) $\mathbf{a^x > 0}$ für alle $x \in \mathbf{R}$; $a^0 = 1$ für alle a .

(3) a^x ist streng monoton steigend für $a > 1$, a^x ist streng monoton fallend für $a < 1$ **:** die Exponential - Funktion ist also **eineindeutig** und damit **umkehrbar !**

Def. 2: Die **Umkehrfunktion** heißt **Logarithmus** (– Funktion):

$y = f(x) = a^x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \log_a (y)$; $y > 0$, da Def.ber. von f^{-1} = Werteber. von f) .

$x = \log_a (y)$ ist diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um y zu erhalten.

Nach Umbenennen der Variablen erhält man wieder $y = f^{-1}(x) = \log_a (x)$, $x > 0$.

Auch die Logarithmusfunktion ist streng monoton (Satz über monotone Funktionen und ihre Umkehrfunktion) und damit eineindeutig.

Hintereinanderausführen von f und f^{-1} hebt sich auf:

$a^{\log_a x} = x$; $\log_a a^x = x$.

Wichtige Exponentialfunktionen und ihre zugehörigen Logarithmusfunktionen:

Basis 10: $y = 10^x \Leftrightarrow x = \log_{10} (y) := \lg (y)$; Zehner-Log.: $y = \lg (x)$

$10^{\lg(x)} = x$; $\lg (10^x) = x$

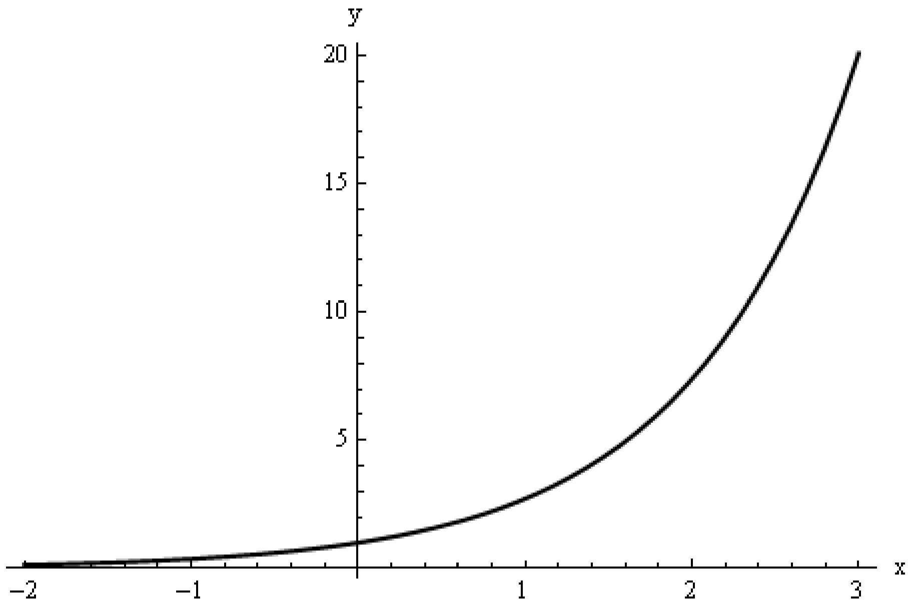
Basis e : (e = 2.718281828..., EULER’sche Zahl, irrational)

$y = e^x \Leftrightarrow x = \log_e (y) := \ln (y)$; natürlicher Log.: $y = \ln (x)$

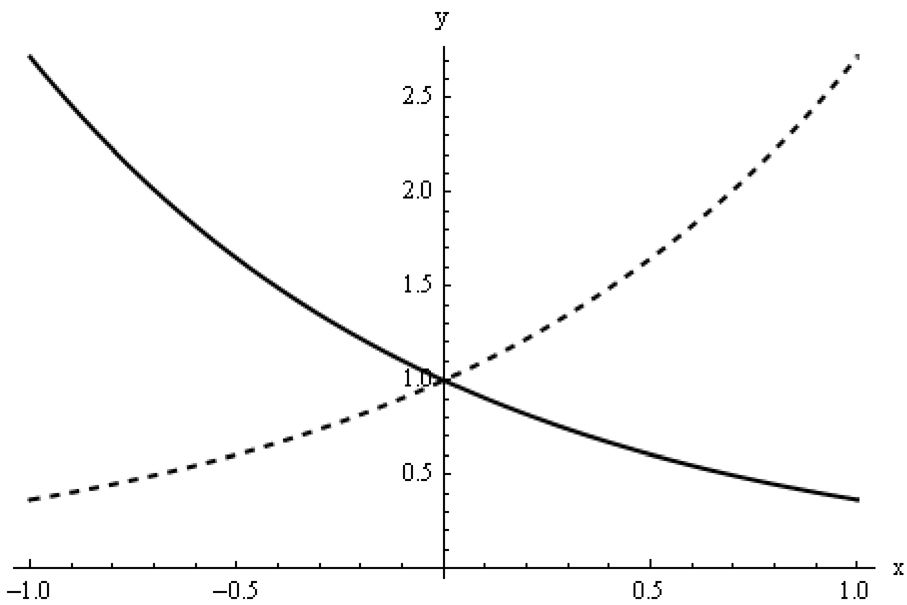
$e^{\ln(x)} = x$; $\ln(e^x) = x$

Basis 2 : $y = 2^x \Leftrightarrow x = \log_2 (y) := \mathrm{lb} (y)$; Zweier-Log. : $y = \mathrm{lb} (x)$

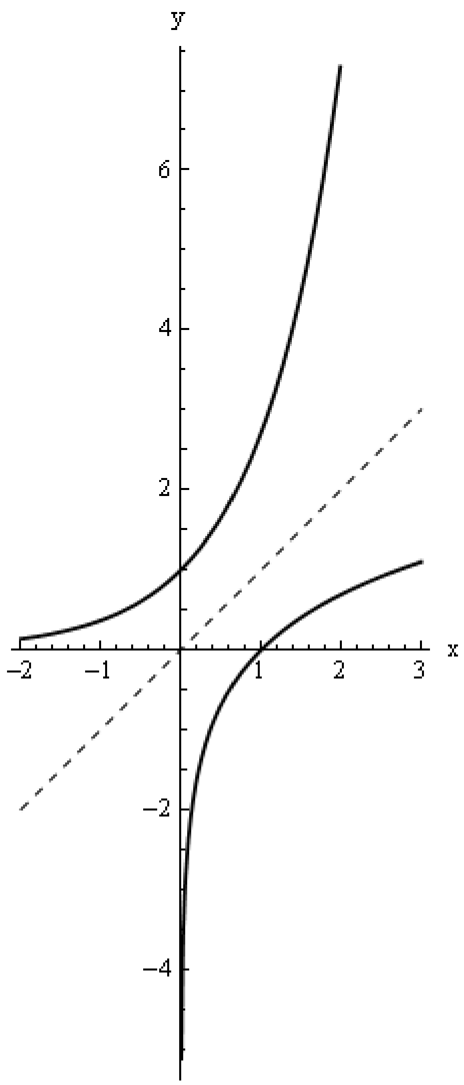
Graph der Funktion $y = e^x$



Die Funktionen $y = e^x$ und $y = \mathbf{e}^{-x}$



Die e-Funktion und ihre Umkehrfunktion $y = \ln(x)$



Satz 2

1) Alle Exponential - Funktionen lassen sich auf die e - Funktion zurückführen:

$\mathbf{a^x = e^{\ln(a)\,x}}$ (dies ist z.B. in manchen Programmiersprachen erforderlich, um Potenzen mit nicht - ganzen Exponenten zu berechnen).

2) Logarithmen-Gesetze beachten !

3) Es gilt die folgende Ungleichung : $1 - 1/x \leq \ln(x) \leq x - 1$.

Es gilt: $e^x \approx 1 + x$ wenn $| x | \ll 1$.

Def. 3

Bei technischen Anwendungen treten oft bestimmte Kombinationen der e - Funktion auf, **hyperbolische Funktionen** oder Hyperbel – Funktionen genannt:

$\cosh(x) := (e^x + e^{-x}) / 2$ („cosinus hyperbolicus“)

$\sinh(x) := (e^x - e^{-x}) / 2$ („sinus hyperbolicus“)

$\tanh(x) := \sinh(x) / \cosh(x)$; $\coth(x) = 1/ \tanh(x)$

Satz 3

a) $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$ (gerader + ungerader Anteil)

b) $\cosh^2 (x) - \sinh^2(x) = 1$

Zur Namensgebung:

a) Darstellung einer Hyperbel (in Normalform)

kartesisch: $x^2 - y^2 = 1$; Parameterdarstellung : $x = \cosh(t)$, $y = \sinh(t)$

b) Beziehung zu den trigonometrischen Funktionen (= KREIS-Fkt.): wird im Komplexen sichtbar

Def. 4: Die inversen Hyperbelfunktionen (**Area - Funktionen**) lauten :

$y = \operatorname{arsinh}(x) \Leftrightarrow x = \sinh(y)$ ($x \in R$) ; $y = \operatorname{arcosh}(x) \Leftrightarrow x = \cosh(y)$ ($x \geq 1$)

$y = \operatorname{artanh}(x) \Leftrightarrow x = \tanh(y)$ ($-1 < x < 1$) ; $y = \operatorname{arcoth}(x) \Leftrightarrow x = \coth(y)$ ($|x| > 1$)

Da die Hyperbelfunktionen Linearkombinationen (Summen) von e - Funktionen sind, kann man die Area-Funktionen (also die Umkehrfunktionen) durch den natürlichen Logarithmus ausdrücken: z.B. $\operatorname{arsinh}(x) = \ln (x + \sqrt{x^2+1})$.

B) Exponential- und Logarithmus- Gleichungen

Ihre Auflösung erfolgt entsprechend der Definition: $\mathbf{y = a^x} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x = \log_a (y)}$,

alternativ durch Anwenden der jeweiligen **Umkehrfunktion**.

Bspl.

1) **Exponentialgl.** (die gesuchte Größe steht im Exponenten) : $7^x = 5$ (Gl. *)

Weg 1 : (laut Def.) $x = \log_7 (5)$

Weg 2 : Anwenden der Umkehrfkt. zu $y = f(x) = 7^x$ auf beiden Seiten

Diese Umkehrfkt ist $x = \log_7 (y)$: $\log_7 (7^x) = \log_7 (5)$. Wegen der **Einein**deutigkeit des Log. ist dies eine erlaubte Umformung (Äquivalenzumformung).

Auf der linken Seite heben sich jetzt Fkt und Umkehrfkt auf: $x = \log_7 (5)$.

Den numerischen Wert für x erhält man durch folgenden Lösungsweg für (*) :

beide Seiten bezüglich einer <u>gebräuchlichen</u> Basis logarithmieren, z.B. lg(..) :

$\lg (7^x) = \lg (5) \;\Leftrightarrow\; x \lg(7) = \lg(5)$ (Log.-Gesetze !) $\Leftrightarrow x = \lg(5) / \lg(7)$

Bem.

Vergleich im obigen Bspl: $x = \log_7 (5) = \lg(5) / \lg(7)$

Dies ist ein Bspl. für die **Umrechnung des Log. zu einer ungebräuchlichen Basis auf den Log. zu einer gebräuchlichen Basis**.

Allgemein: $\log_a (b) = \lg (b) / \lg (a) = \ln (b) / \ln (a)$

Beweis: $x = \log_a b \;\Leftrightarrow\; a^x = b \;\Leftrightarrow\; 10^{(\lg a)x} = 10^{\lg b} \;\Leftrightarrow\; (\lg a)\, x = \lg b \;\Leftrightarrow$

$x = \lg(b) / \lg(a)$; für Basis e analog

Insbesondere: $\log_e 10 = \lg(10) / \lg(e) = 1/ \lg(e)$; $\log_{10} e = \ln(e) / \ln(10) = 1/\ln(10)$

2) **Logarithmusgl.:** $\log_5 (x) = 3$

Weg 1: (laut Def.) $x = 5^3$;

Weg 2: Anwenden der Umkehrfkt. zu $y = f(x) = \log_5 (x)$ auf beiden Seiten

Diese Umkehrfkt ist $x = 5^y$: $5^{\log_5(x)} = 5^3$ (wegen der **Einein**deutigkeit der Exp.-Fkt. ist dies eine Äquivalenzumformung). Auf der linken Seite heben sich jetzt Fkt und Umkehrfkt auf: $x = 5^3$.

<u>Ergänzung</u>

Beachten Sie beim Umgang mit den elementaren Funktionen die jeweiligen Rechengesetze.

Beispiele

1) $(e^x)^2 = e^x \cdot e^x = e^{x+x} = e^{2x}$ (Potenzgesetze)

2) $e^{(x^2)} = e^{x \cdot x} = (e^x)^x$ (FALSCH ist : $e^{x \cdot x} = e^x e^x$)

3) $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ (Logarithmengesetze)

4) $\ln(x + y)$ (keine weitere Umformung;
FALSCH ist: $\ln(x + y) = \ln(x) + \ln(y)$)

5) $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
(Additionstheoreme;
FALSCH ist: $\sin(x + y) = \sin(x) + \sin(y)$)

6) sin(x + 2) = 0.5 $\Rightarrow$ x = 28°

1. Fehler: x muss im Bogenmaß angegeben werden, denn die Zahl 2 meint nicht 2° ; also $x_0 = \pi / 6 - 2 \approx -1.476$

2. Fehler: es gibt noch (unendlich viele) weitere Lösungen

Ergänzung: Eineindeutigkeit und Äquivalenzumformungen

Eindeutige Zuordnung: demselben Argument (symbolisch: $x_1 = x_2$) wird immer derselbe Funktionswert zugeordnet,

in Zeichen: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (1) .

Aus dieser Festlegung folgt unmittelbar: zu zwei verschiedenen Funktionswerten gehören auch zwei verschiedene Argumente,

in Zeichen: $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$ (1a) .

Man kann man auch formal - logisch zeigen: (1) $\Leftrightarrow$ (1a) .

Eineindeutige Zuordnung: " verschiedenen x - Werten werden stets verschiedene y - Werte zugeordnet “ , in Zeichen: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (2) .

Aus dieser Festlegung folgt unmittelbar: zum gleichen Funktionswert gehört auch immer das gleiche Argument, in Zeichen: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (2a) .

Man kann man auch formal - logisch zeigen: (2) $\Leftrightarrow$ (2a) .

Für eineindeutige Funktionen gelten alle Aussagen.

Kombiniert man die Aussagen (1) und (2a), ergibt sich als Charakterisierung der Eineindeutigkeit:

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad (3)$$

Kombiniert man die Aussagen (1a) und (2), ergibt sich als Charakterisierung der Eineindeutigkeit:

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad (3a)$$

Die Äquivalenz der beiden Aussagen (3) und (3a) kann man auch direkt formal - logisch zeigen.

Diese Erkenntnisse sollen jetzt auf das Lösen von Gleichungen (und Ungleichungen) angewendet werden (s. insbesondere Duden „Rechnen und Mathematik“, Abschnitt „Äquivalenzumformung“)

Wenn man Gleichungen (analoges gilt für Ungleichungen) umformt, sollen die alte und die neue Aussageform äquivalent sein (s. Abschnitt über Gleichungen und Ungleichungen). Die erlaubten Umformungen sind Äquivalenzumformungen (auf dem Definitionsbereich der Ausgangs-Aussageform !) : $T_1 = T_2$ (1) $\Leftrightarrow$ $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_2$ (2)

Dies impliziert insbesondere, dass man von (2) auf (1) eindeutig zurückschließen kann.

Eine Umformung kann als Anwendung einer Funktion (auf beiden Seiten der Gleichung) aufgefasst werden: $\tilde{T} = f(T)$; z.B.

$T_1 = T_2 \Leftrightarrow T_1 + z = T_2 + z$ als Anwendung der Funktion $f(T) = T + z$.

Die Forderung, es müsse sich bei einer solchen Umformung um eine Äquivalenz - umformung handeln, schreibt sich dann so: $T_1 = T_2 \Leftrightarrow f(T_1) = f(T_2)$.

Dies ist aber die Bedingung für die **Eineindeutigkeit** der Funktion f .

Damit wird klar:

1) Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung: $f(T) = T^2$ ist nicht eineindeutig. Auch (-T) wird durch f auf T^2 abgebildet: es können („Schein“-) Lösungen hinzukommen.
2) Wurzelziehen ist eine Äquivalenzumformung nur im Bereich positiver Zahlen; löst man die Gleichung $x^2 = 4$ nur durch Wurzelziehen, geht eine Lösung verloren.
3) Das Anwenden der trigonometrischen Funktionen ist keine Äquivalenzumformung; aus $T_1 = T_2$ folgt zwar $\sin(T_1) = \sin(T_2)$, aber nicht umgekehrt. Es können („Schein“-) Lösungen hinzukommen.
4) Das Anwenden der trigonometrischen Umkehr-Funktionen ist eine Äquivalenz-umformung nur im Hauptwertbereich: es gehen Lösungen verloren (die man durch Nachdenken dann rekonstruieren muss: Einheitskreis, Periodizität)
5) Das Logarithmieren und Exponieren (beider Seiten) einer Gleichung ist eine Äquivalenzumformung, da $\log_a(T)$ und a^T eineindeutige Funktionen sind.

Ferner gilt:

Ist f(T) **streng monoton wachsend**, bleibt das Relationszeichen in Ungleichungen erhalten. Ist f(T) **streng monoton fallend**, muss man das **Relationszeichen** in Ungleichungen **umdrehen**.

Bspl: Die Multiplikation mit (-1) entspricht der Anwendung der Funktion $f(T) = -T$ und diese Funktion ist streng monoton fallend.