<u>Funktionen</u>

<u>1. Der Funktionsbegriff</u>

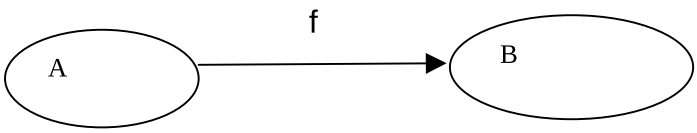
Def. 1 (Funktion)

Seien A und B Mengen. Eine **Funktion** f von A nach B ($f : A \to B$) ist eine Vorschrift, die <u>jedem</u> Element aus A <u>genau ein</u> Element aus B zuordnet (**<u>ein</u>deutige** Zuordnung). A heißt **Definitionsbereich**, B **Werte<u>vorrat</u>**.

Um diese Zuordnung zum Ausdruck zu bringen, schreibt man auch: $y = f(x)$ (wobei $x \in A$ und $y \in B$). x heißt **Argumen**t von f (die unabhängige Variable), y ist der **Funktionswert** von f an der Stelle x (abhängige Variable; auch Bild von x genannt) .

<u>Ein</u>deutige Zuordnung heißt dann: „demselben Argument (symbolisch: $x_1 = x_2$) wird immer derselbe Funktionswert zugeordnet“ ; in Zeichen: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
Es ist aber zulässig, dass zwei verschiedenen Argumenten (symbolisch: $x_1 \neq x_2$) derselbe Funktionswert zugeordnet wird.

Man sagt auch: f ist eine **Abbildung** von A nach B. Dies wird graphisch so veranschaulicht:



Auf der Ebene der Elemente schreibt man auch: $x \mapsto f(x)$, lies: x wird auf f(x) **abgebildet**.
Man kann die Funktionsvorschrift f auch als „**Handlungsvorschrift**“ auffassen:
„ mache mit x das, was f vorschreibt “ (z.B. Quadrieren).

Die Menge $W = \{ y \in B \mid y = f(x) \}$ heißt **Werte<u>bereich</u>** von f : W ist die Menge aller Elemente aus B, die tatsächlich als Funktionswert von f vorkommen; $W \subset B$.

Argument und Funktionswert kann man auch mit anderen Buchstaben bezeichnen, z.B. $z = f(t)$, $u = g(v)$, $x = h(y)$. Manchmal nennt man die Funktion auch einfach y und schreibt: $y = y(x)$.

Sei $f : A \to B$ und $A \subset \mathbf{R}$ und $B = \mathbf{R}$: dann spricht man von einer **reellen Funktion**.

2. Weitere Begriffe

A) Komposition; zusammengesetzte Funktion

Def. 1 (Komposition = zusammengesetzte Funktion)

$f(x) = u(v(x))$ heißt zusammengesetzte Funktion oder Komposition.

$u = u(v)$ heißt äußere Funktion, $v = v(x)$ heißt innere Funktion.

Andere Schreibweise: $f(x) = (u \circ v)(x)$, lies: u verkettet mit v .

B) Die Umkehrfunktion

Def. 2 (Eineindeutigkeit; Umkehrbarkeit; inverse Funktion)

Gegegen sei die Funktion $f : A \to B$, $W_f \subset B$ sei der Wertebereich.

f heißt **eineindeutig** (injektiv), wenn für alle $x_1 , x_2 \in A$ gilt:

verschiedenen Argumenten werden stets **verschiedene Funktionswerte** zugeordnet, in Zeichen: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

f(x) ist dann **umkehrbar** (invertierbar). Die **Umkehrfunktion** g (die inverse Funktion) ist wie folgt definiert:

$g : W_f \to A$ ordnet jedem $y \in W_f$ genau das $x \in A$ zu, für welches $y = f(x)$ gilt.

Schreibweise: $x = g(y) = f^{-1}(y)$.

Bem.

1)

Um die Umkehrfunktion zu ermitteln, löst man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auf.

Das, was durch die Handlungsvorschrift f(x) mit x „passiert ist“, soll rückgängig gemacht werden (siehe auch Bem. 3).

Wenn es nur eine Lösung gibt, ist f(x) im ganzen Definitionsbereich umkehrbar.

Wenn es mehrere Lösungen gibt, ist f(x) nur **abschnittsweise umkehrbar**. Jede dieser Lösungen ist in dem entsprechenden Teil des Definitionsbereich (Teil-Intervall, „Abschnitt“) dann die jeweilige Umkehrfunktion. Man kann auch sagen: der Definitionsbereich muss auf einen solchen Abschnitt eingeschränkt werden, damit die Funktion ist in diesem Abschnitt umkehrbar ist.

Die Auflösung gelingt rein technisch **nicht immer**.

Die Umkehrbarkeit kann man auch ganz pragmatisch überprüfen, wenn man den Graphen von f(x) kennt: jede zur x-Achse parallele Gerade (dies entspricht der Vorgabe eines beliebigen y-Wertes) darf den Graphen höchstens einmal schneiden.

2)

Sei $y=f(x)$ umkehrbar ; $x=g(y)$ sei die Umkehrfunktion. Den Graphen der Funktion $\mathbf{y}=g(\mathbf{x})$ (x und y werden in der ursprünglichen Umkehrfunktion also vertauscht) erhält man dann durch Spiegelung des Graphen von $y=f(x)$ an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten (und deren Verlängerung in den 3. Quadranten).

3)

“**Die Wirkungen von Funktion und Umkehrfunktion heben sich auf**“:

Sei $y=f(x)$ und $x=g(y)$ sei die Umkehrfunktion. Dann gilt:

$x = g(y) = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x)$; $f^{-1} \circ f$ ist die **identische Abbildung**: wenn man $f^{-1} \circ f$ auf x anwendet, kommt wieder x raus . Analogie: $x * a * a^{-1} = x * \mathbf{1}$

4)

In $f^{\mathbf{-1}}(y)$ ist -1 nicht als Exponent aufzufassen, die Schreibweise soll nur an das inverse Element der Multiplikation erinnern (s.o.) .

Bspl.: Sei $f(x) = x^2$, $x \geq 0$. Dann ist $f^{\mathbf{-1}}(x) = \sqrt{x}$, aber $(f(x))^{-1} = 1/x^2$.

Die inverse Funktion ist also von der **reziproken** Funktion zu unterscheiden.

C) Symmetrie

Def. 3 (Symmetrie)

Wenn $f(x) = f(-x)$, ist f eine **gerade** Funktion.

Wenn $f(x) = -f(-x)$, ist f eine **un**gerade Funktion; $f(x) = -f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$.

Bspl. (Definitionsbereich ist jeweils **R**)

$f(x) = x^2$ ist eine gerade Funktion. Der Graph verläuft **symmetrisch zur y-Achse**.

$f(x) = x^3$ ist eine UNgerade Funktion. Der Graph verläuft **PUNKTsymmetrisch zum Ursprung (0,0) .**

Satz 1:

a) Sei $f(x) = g(x) * h(x)$.

f ist nur symmetrisch, wenn g und h symmmetrisch sind, und zwar gilt:

f ist gerade, wenn g und h gleiche Symmetrie haben.

f ist UNgerade, wenn g und h UNgleiche Symmetrie haben.

b) Sei $f(x) = g(x) + h(x)$.

f ist nur symmetrisch, wenn g und h GLEICHE Symmetrie aufweisen.

Bspl.

$f(x) = x * x^2$ ist UNgerade. $f(x) = x * x^3$ ist gerade.

$f(x) = x + x^2$ hat keine Symmetrie . $f(x) = 7x^4 - 9x^2$ ist gerade.

D) Monotonie

Def. 4 (Monotonie)

Eine reelle Fkt. f(x) heißt **monoton steigend**, wenn aus $x_2 > x_1$ folgt: $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Eine reelle Fkt. f(x) heißt **monoton fallend**, wenn aus $x_2 > x_1$ folgt: $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Sie heißt **STRENG** monoton, wenn das Gleichheitszeichen ausgeschlossen ist.

Bspl.

$f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$, ist eine streng monoton steigende Funktion.

$g(x) = - x^3$, $x \in \mathbf{R}$, ist eine streng monoton fallende Funktion.

$h(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$, ist NICHT monoton. Sie ist nur ABSCHNITTSWEISE monoton:
für $x \geq 0$ ist sie streng monoton steigend, für $x \leq 0$ ist sie streng monoton fallend.

Bem.

Statt „abschnittsweise" sagt man auch „stückweise" .

Satz 2

Sei $f : A \to \mathbf{R}$ streng monoton. **Dann ist f umkehrbar** und die Umkehrfunktion ist wieder streng monoton.

E) Beschränktheit

Def. 5 (Beschränktheit)

Eine reelle Funktion $f: A \to \mathbf{R}$ heißt <u>nach oben</u> (bzw. <u>nach unten</u>) **beschränkt**, wenn gilt: $f(x) \leq K$ (bzw. $f(x) \geq L$) für alle $x \in A$. f heißt beschränkt, wenn $L \leq f(x) \leq K$ für alle $x \in A$.