3. Rationale Funktionen

Def. 1 (Polynom)

Die Funktion $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ heißt **Polynom**

(ganzrationale Fkt.) **n - ten Grades** ($a_n \neq 0$). Die a_i heißen **Koeffizienten**.

Polynome sind auf ganz **R** definiert und leicht berechenbar (effizient geht dies über das sog. Hornerschema). Eine Funktion vom Typ $f(x) = a_k x^k$ heißt **Potenzfunktion**.

Satz 1

Zwei Polynome n-ten Grades sind gleich (im Sinne von **identisch**: p(x) = q(x) für **alle** x ; Übereinstimmung der „Objekte" ; $p(x) \equiv q(x)$), wenn sie in allen Koeffizienten übereinstimmen. Beachte: Sei $p(x) = x^2$, $q(x) = x^3$; p(x) = q(x) für x = 0 oder x = 1.
Die Polynome sind aber nicht gleich.

Def. 2

Seien p und q Polynome. Dann heißt der Quotient p(x)/q(x) **gebrochen rationale** Funktion (er ist dort nicht definiert wo q(x) = 0). Wenn der Grad von p $\geq$ Grad von q, ist Polynomdivision möglich. Man erhält so den ganzrationalen und ggf. den **echt gebrochen** rationalen Teil.

Satz 2

Sei $p(x)$ ein Polynom n-ten Grades und x_0 eine **Nullstelle** von $p(x)$, also $p(x_0) = 0$. Dann kann man $p(x)$ **faktorisieren**, indem man den **Linearfaktor** $(\mathbf{x - x_0})$ **ausklammert** („abspaltet“): $p(x) = (x - x_0) * q(x)$, $q(x)$ ist ein Polynom $(n-1)$ -ten Grades. Man erhält $q(x)$ offensichtlich durch Polynomdivision, die ohne Rest aufgeht:

$p(x) : (x - x_0) = q(x)$.

Def. 3

Sei $p(x) = (x - x_0)^{\mathbf{k}} * q(x)$, $q(x_0) \neq 0$. Dann heißt x_0 eine **k-fache Nullstelle** von $p(x)$.

Satz 3

Sei x_0 eine k-fache Nullstelle eines Polynoms $p(x)$. Ist k ungerade, wechselt $p(x)$ bei x_0 das Vorzeichen, sonst nicht.

Satz 4

Ein reelles Polynom n - ten Grades ($n > 0$) hat höchstens n reelle Nullstellen, wobei eine k-fache Nullstelle auch k mal zählt.

Satz 5 (**Partialbruchzerlegung**)

Sei $f(x) = p(x)/q(x)$ echt gebrochen rational. Ist $q(x)$ faktorisierbar, läßt sich f in eine Summe von Brüchen zerlegen, in deren Nennern die Faktoren von $q(x)$ stehen.

Bspl.

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)} \quad (1) \quad \overset{!}{=} \quad \frac{a_1}{x - 1} + \frac{a_2}{x + 2} \quad (2) \quad = \quad \frac{a_1 (x+2) + a_2 (x-1)}{(x-1)(x+2)} \quad (3)$$

Zu (3) kommt man, indem man (2) wieder auf den Hauptnenner bringt. Dann vergleicht man (1) und (3):

die Nenner sind gleich, also müssen auch die Zähler gleich sein $\Rightarrow 1 \overset{!}{=} a_1 (x+2) + a_2 (x-1)$

Bestimmung von a_1 , a_2: Koeffizientenvergleich ! Alternative: spezielle Werte einsetzen.

Anwendung:

Integration gebrochen rationaler Funktionen; Laplace-Transformation