7. Grenzwerte von Funktionen; Stetigkeit

A) Grenzwert

Def. 1

$\lim_{x \to \infty} f(x) = g$, wenn gilt:

zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $u > 0$, so daß
$|f(x) - g| < \varepsilon$, wenn $x > u$.

Man sagt: $f(x)$ konvergiert für $x \to \infty$ gegen g.

Analog für: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = g$.

Def. 2 (" ε - δ - Def. ")

$\lim_{x \to a} f(x) = g$, wenn gilt:

zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß $|f(x) - g| < \varepsilon$, wenn $|x - a| < \delta$.
Man sagt: f konvergiert für $x \to a$ gegen g (a muß nicht im Definitionsbereich liegen).

Satz 1 (Wichtige Grenzwerte)

a) $\lim_{x \to 0} [(\sin x)/x] = 1$; x im Bogenmaß !!

b) $\lim_{x \to 0} [(e^x - 1)/x] = 1$

c) $\lim_{x \to 0} (x \ln x) = 0$

d) $\lim_{x \to \infty} [(\ln x)/x] = 0$

e) $\lim_{x \to \infty} (x^k/e^x) = 0$ ("die e-Fkt wächst schneller als jede Potenz")

Satz 2 (Grenzwertsätze)

Sei $\lim_{x \to a} f(x) = u$, $\lim_{x \to a} g(x) = v$. Dann gilt:

a) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = u + v$

b) $\lim_{x \to a} (f(x) * g(x)) = u * v$

c) $\lim_{x \to a} (f(x) / g(x)) = u/v$ für $v \neq 0$

Bem. : Statt $x \to a$ kann auch $x \to \pm\infty$ stehen .

Aus (a) und (b) folgt (α, β sind Zahlen) :

$$\lim_{x \to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x \to a} f(x) + \beta \lim_{x \to a} g(x)$$

Dies nennt man die **Linearität des Grenzwertes.**

Satz 2a

Sei $f(x) = g(h(x))$. Sei $\lim_{x \to a} h(x) = h$, und $g(h)$ möge

existieren. Dann gilt: $\lim_{x \to a} f(x) = g(\lim_{x \to a} h(x)) = g(h)$.

Falls $|h(x)| \to \infty$ für $x \to a$ und $g(h) \to v$ für $|h| \to \infty$ gilt:
$\lim_{x \to a} f(x) = v$.

Statt $x \to a$ kann auch $x \to \pm\infty$ stehen.

B) Stetigkeit

Def. 3

Das offene Intervall $(a-h, a+h) = \{x \mid a-h < x < a+h\}$ heißt eine Umgebung von a.

Def. 4

Sei f(x) eine reelle Fkt. f(x) heißt stetig in a, wenn f(x) in a (und einer Umgebung von a) definiert ist und $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Eine Fkt. heißt stetig in einem Intervall (a,b), wenn sie für alle Punkte des Intervalls stetig ist.

Anschaulich heißt das, daß man den Graphen von f(x) an einem Stück zeichnen kann. An Lücken im Definitionsbereich oder an Sprungstellen kann f(x) also nicht stetig sein.

Satz 3

1) Seien f(x) und g(x) stetig stetig in a.
   Dann gilt dies auch für $f(x) + g(x)$, $f(x) * g(x)$
   sowie $f(x)/g(x)$ (falls $g(a) \neq 0$)
   sowie $f(g(x))$.

2) Sei $f: A \to W_f$ stetig und umkehrbar. Dann ist auch f^{-1} stetig im Intervall W_f .

Beweis: Def. und Grenzwertsätze

Bspl.

a)
Polynome sind dann für alle $x \varepsilon R$ stetig:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

geht durch Multiplikation und Summation aus stetigen Fkt hervor: $y = x$ und $y = a_k$ sind stetig =>

$x^k = x*x*..*x$ ist stetig und damit ist auch

$a_k * x^k$ stetig .

b)
Seien p und q Polynome: $f(x)= p(x)/q(x)$ ist überall stetig, wo $q(x) \neq 0$.

c)
Sei $f(x) = x^n$ $(n\varepsilon N)$ und $x \geq 0$. $f(x)$ ist stetig und umkehrbar. Die Umkehrfkt $g(x) = \sqrt[n]{x}$ ist dann stetig.