6. Folgen und Reihen

A) Definitionen und Beispiele

Def. 1 (Folge)

Eine Funktion $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ heißt (reelle) Folge. Die Funktionswerte $f(n) = a_n$ nennt man die Glieder der Folge. Schreibweise: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ oder kurz (a_n) .

Def. 2 (spezielle Folgen)

a) Eine Folge mit konstanter Differenz der Folgeglieder, also $d = a_{n+1} - a_n$ $(d \neq 0)$, heißt arithmetische Folge.

$a_{n+1} = a_n + d$ ist das rekursive Bildungsgesetz.

$a_{n+1} = a_1 + n\,d$ ist das direkte Bildungsgesetz.

b) Eine Folge mit konstantem Quotienten der Folgeglieder, also $q = a_{n+1} / a_n$ $(q \neq 0$, $q \neq 1)$, heißt geometrische Folge.

$a_{n+1} = a_n * q$ ist das rekursive Bildungsgesetz.

$a_{n+1} = a_1 * q^n$ ist das direkte Bildungsgesetz.

c) Eine Folge mit wechselndem Vorzeichen der Folgeglieder, also $a_{n+1} * a_n < 0$, heißt alternierende Folge.

d) Eine Folge mit gleichbleibenden Folgegliedern, also a, a, a, ... , heißt konstante Folge.

e) Die Folge 1 , 1/2 , 1/3 , 1/4 , ... , also $a_n = 1/n$, heißt harmonische Folge.

Def. 3 (Reihe)

Addiert man die ersten n Glieder einer Folge (a_n), erhält man die n - te Teilsumme (Partialsumme) dieser Folge:

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad .$$

Die Folge $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots = (s_n)$ heißt <u>Reihe</u> (zur Folge (a_n)) .

Wichtige Reihen sind : die arithmetische , die geometrische , die harmonische Reihe.

Satz 1

a) Für die arithmetische Reihe gilt: $s_n = n\, a_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}\, d = \dfrac{n}{2}\,(a_1 + a_n)$.

b) Für die geometrische Reihe gilt : $s_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

c) Für die harmonische Reihe kann man keine Summenformel angeben, nur eine Abschätzung über den natürlichen Logarithmus:

$$\ln(n+1) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le \ln(n) + 1 \, .$$

B) Konvergenzbetrachtungen (Grenzwert)

Def. 1

Eine Folge heißt **konvergent**, wenn sie einen **Grenzwert** („limes“) hat.

Ist a der Grenzwert der Folge (a_n) , schreibt man: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, wenn man sich ein beliebiges Intervall um a , also ($a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$) mit

beliebigen ε , vorgeben kann und dann dazu passend jeweils ein n_0 findet, so daß für $n > n_0$ **alle** Glieder der Folge in diesem Intervall liegen.

Kurz: zu ***jedem*** $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 , so daß $| a_n - a | < \varepsilon$ für (alle) $n > n_0$.

Eine nicht-konvergente Folge heißt divergent.

Eine konvergente Folge mit Grenzwert 0 heißt Nullfolge.

Satz 1 (Grenzwertsätze für Folgen)

(a_n) und (b_n) sollen konvergente Folgen sein: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Dann gilt:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n * b_n) = a * b$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a / b \quad (b \neq 0)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^r = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^r = a^r$

Aus (a) und (b) folgt (α, β sind konstante Zahlen) : $\lim (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim a_n + \beta \lim b_n$
Dies nennt man die ***Linearität*** des Grenzwertes.

Def. 2 (ein spezieller Grenzwert)

Sei $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Man kann zeigen, daß diese Folge einen Grenzwert hat. Diesen

Grenzwert nennt man die **Euler ‘ sche Zahl e** . Also: $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

Def. 3

Wenn eine Reihe (s_n) konvergiert, heißt der Grenzwert auch Summenwert: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

Da $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, schreibt man für $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ auch kurz: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Satz 2 (Konvergenz spezieller Reihen)

a) Die arithmetische Reihe divergiert.

b) Die geometrische Reihe konvergiert für $|q| < 1$; es gilt dann : $s = \frac{a_1}{1-q}$

c) Die harmonische Reihe divergiert.

d) Die Reihe $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...$ konvergiert, ihr Summenwert ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \pi^2/6$.