Die komplexen Zahlen

1. Einführung

A) Erweiterung des Zahlenkörpers

Def. 1 (imaginäre Einheit)

Die Gl. $x^2 + 1 = 0$ hat zwei Lösungen, nämlich **i** und **- i** . Es soll also gelten:
$\mathbf{i}^2 = -1$ und $(-\mathbf{i})^2 = -1$. Ansonsten soll man mit dem neuen Symbol, der „imaginären Einheit" , ganz normal rechnen können.

Oft sieht man die Schreibweise: $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$. Hier darf man $\sqrt{-1}$ aber genau wie **i** nur als Symbol ansehen. Keinesfalls darf man unbedacht damit wie mit einer reellen Wurzel rechnen, z.B. $\sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$.

Bspl.

$(2\,i)^2 = 2^2\,i^2 = -4$

$3\,i - 4\,i = -i$

$i^3 = i \;\; i \;\; i = (-1)\,i = -i$

$i^4 = i^2 \;\; i^2 = 1$

Def. 2 (komplexe Zahl)

Eine Zahl $z = a + \mathbf{i}\,b$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, heißt **komplexe Zahl**.
a heißt **Realteil** von z , kurz: a = Re (z) ; b heißt **Imaginärteil** von z , kurz: b = Im (z).
Die imaginäre Einheit „markiert" den Imaginärteil von z, gehört aber nicht dazu.
Statt **i** b kann man auch b **i** schreiben.
Die Menge aller komplexen Zahlen heißt **C** .
Eine reelle Zahl x kann jetzt als komplexe Zahl $z = x + \mathbf{i}\,0$ aufgefasst werden.

Bspl.

$z = i$	$= 0 + i\;1$	:	Re (z) = 0 , Im (z) = 1
$z = 3 - 2\,i$	$= 3 + i\,(-2)$	:	Re (z) = 3 , Im (z) = -2
$z = 2$	$= 2 + i\;0$	:	Re (z) = 2 , Im (z) = 0

Bspl.

$x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = -1$

Die Lösung kann nicht reell sein! Setze $u = x+1$: $u^2 = -1 \Rightarrow u = i$ oder $u = -i$.

Rücksubsitution: $x + 1 = i$ oder $x + 1 = -i \Rightarrow x_1 = -1 + i$, $x_2 = -1 - i$

Die Lösungen sind also komplex.

Bem.

1)

Komplexe Zahlen helfen auch bei der Lösung reeller Probleme (z.B. Wechselstrom-Technik). Einige Rechnungen sind im Komplexen bequemer durchzuführen als im Reellen. Einige reelle Integrale sind nur über den Umweg ins Komplexe zu lösen.

2)

Die komplexen Zahlen sind nicht „merkwürdiger“ als es dir negativen Zahlen für Mathematiker früherer Zeiten waren, oder die nicht-rationalen Zahlen für die Pythagoreer.

Def. 3 (konjugiert Komplexes)

Sei $z = a + \mathbf{i}\, b \in \mathbf{C}$. Dann heißt $a - \mathbf{i}\, b$ die zu z **konjugiert komplexe** Zahl, z^* oder $\bar{z}$.

(**i** wird durch **- i** ersetzt)

Bspl

a) $z = 27 - 5i$: $z^* = 27 + 5i$; $(z^*)^* = 27 - 5i = z$

b) $z = -3i$: $z^* = +3i$

c) Für die Lösung der obigen quadr. Gl. gilt : sie sind zueinander konjugiert komplexe Zahlen, also $x_2 = x_1^*$ [und $x_1 = x_2^*$] .

Def. 4 (Rechengesetze)

Seien $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$: $z_1 = a_1 + \mathbf{i}\, b_1$, $z_2 = a_2 + \mathbf{i}\, b_2$. Dann gilt:

(1) $z_1 + z_2 = (a_1 + \mathbf{i}\, b_1) + (a_2 + \mathbf{i}\, b_2) = (a_1 + a_2) + \mathbf{i}\, (b_1 + b_2)$

(2) Sei $\alpha \in \mathbf{R}$: $\alpha\, z_1 = \alpha\, a_1 + \mathbf{i}\, \alpha\, b_1$

(3) $z_1\, z_2 = (a_1 + \mathbf{i}\, b_1)\,(a_2 + \mathbf{i}\, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathbf{i}\, (a_1 b_2 + b_1 a_2)$

Bem.

Die Rechenoperationen sind so definiert, dass **mit den komplexen Zahlen genauso gerechnet werden kann wie mit den reellen Zahlen**. Das Ergebnis in (3) erhält man also durch Ausmultiplizieren (Anwenden des Distributivgesetzes), Umordnen (Anwenden des Kommutativgesetzes) und Zusammenfassen der mit **i** markierten Terme (Anwenden des Assoziativgesetzes).

Bspl.

$z_1 = 3 - i$, $z_2 = 2 + 3i$

$z_1 + z_2 = 5 + 2i$

$z_1 z_2 = 9 + 7i$

Satz 1 (Operationen mit dem konjugiert Komplexen)

(1) Sei $z = a + \mathbf{i}\, b$.

$z + \bar{z} = a + \mathbf{i}\, b + a - \mathbf{i}\, b = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z).$

$z - \bar{z} = a + \mathbf{i}\, b - (a - \mathbf{i}\, b) = 2\,\mathbf{i}\, b = 2\,\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(z).$

$z\,\bar{z} = (a + \mathbf{i}\, b)(a - \mathbf{i}\, b) = a^2 - (\mathbf{i}\, b)^2 = a^2 + b^2$.

(2) Seien u und v komplexe Zahlen. Dann gilt für das Produkt ihrer komplex Konjugierten: $u^* \, v^* = (u\,v)^*$

Bspl.

$z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 + i$

$z_1 / z_2 = (2 + i) / (1 + i)$; um den Nenner reell zu machen, wird mit z_2^* erweitert:

$$\frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$$

B) Die Gauß'sche Zahlenebene

Def. 5 (kartesische Form)

Wir vereinbaren für $z = x + \mathbf{i}\, y$ die Schreibweise $\mathbf{z = (x , y)}$. Man nennt dies ein geordnetes reelles Zahlenpaar.

x und y kann man als Koordinaten eines Punktes in der Ebene auffassen, wenn man ein kartesisches Koordinatensystem einführt. $z = (x , y)$ wird deshalb auch **kartesische Darstellung** (kartesische Form) genannt. Da es sich hier um die Darstellung einer komplexen Zahl handelt, spricht man von der komplexen (Zahlen-) Ebene oder der **Gauß'schen Zahlenebene**.

Die x-Achse heißt auch „reelle Achse", die y-Achse „imaginäre Achse".

-----> BILD (a) Punkte in der komplexen Ebene, Zeiger

Bem.

Die komplexe Ebene ermöglicht also eine geometrische Veranschaulichung der komplexen Zahlen. Die Einführung des „Zeigers" erinnert an Vektoren im $\mathbf{R}^2$. Tatsächlich entsprechen die Rechengesetze (1) und (2) in Def. 4 der Addition und der skalaren Multiplikation von Vektoren. Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen ist aber anders definiert, nämlich so, dass sie wie die Multiplikation von reellen Zahlen funktioniert **!!**

Bspl.

$z_1 = 3 + 2\,i = (3 , 2)$, $z_2 = -1 + i = (-1 , 1)$

$z_1 + z_2 = (3 - 1 , 2 + 1) = (2 , 3)$

$z_1\, z_2 = (3 + 2\,i)(-1 + i) = -3 - 2 + 3\,i - 2\,i = (-5 , 1)$

Die geometrische Darstellung legt folgende Definition nahe:

Def. 6 (Polarform)

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist der Betrag der komplexen Zahl z = (x , y) .

arg z = φ heißt Argument von z ; tan(φ) = y / x .

Mit x = | z | cos(φ) , y = | z | sin(φ) erhält man die Polarkoordinaten-Darstellung

(Polarform) z = | z | (cosφ + **i** sinφ) = | z | (cosφ , sinφ)

-----> BILD (b) Betrag und Argument

Bspl.

a) z = i ; | z | = 1 , arg z = π/2 : z = i sin (π/2)

b) z = 3 – 2 i ; | z | = $\sqrt{13}$, arg z = ? **------> Bild (c)**

tanφ = -2 / 3

arctan (-2/3) = -33,7° = - 0.588 im Bogenmaß

φ = - 33, 7° oder φ = 326,3° (= 5.695 im Bogenmaß)

z = $\sqrt{13}$ (cosφ **+ i** sinφ) = $\sqrt{13}$ **(** cosφ **,** sinφ **)**

Satz 2

Sei $z_1 = x_1 + \mathbf{i}\, y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathbf{i}\, y_2$. Es gilt $z_1 = z_2$, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$.

Aus einer Gleichung für die beiden komplexen Zahlen werden also zwei Gleichungen, nämlich eine für die Realteile und eine für die Imaginärteile (vergleiche: aus einer Vektorgleichung im $\mathbf{R}^2$ werden 2 Koordinatengleichungen).

Man kann von zwei ungleichen komplexen Zahlen aber nicht sagen, welche von den beiden größer ist. **------> Bild (d)**

Man kann das nur für die reellen Größen Betrag und Argument bzw. Realteil und Imaginärteil entscheiden.

Das Anordnungsaxiom (A10) gilt in C nicht.

Bem.

Veranschaulichung der Rechenoperationen in der Gauß’schen Zahlenebene

------> Bild

2. Funktionen mit komplexem Argument

Die elementaren Funktionen können auch für komplexe Argumente definiert werden; man spricht von der „Fortsetzung ins Komplexe“. Alle Rechengesetze sollen dabei (möglichst) erhalten bleiben.

Def. 1 (komplexes Polynom , komplexe e-Funktion)

Sei z $\in$ **C .**

(1) $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, z^k = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ heißt **komplexes Polynom**.

Die Koeffizienten a_k können ebenfalls komplex sein.

Die Gleichung p(z) = 0 hat als Lösung die komplexen Nullstellen des Polynoms.

(2) $f(z) = e^z$ ist die **komplexe e-Funktion .**

Sei $z = a + i\,b$: $e^z = e^{a + i\,b} = e^a \, e^{i\,b}$ (die Potenzgesetze gelten weiter !) .

Von besonderem Interesse ist der neue Faktor $\mathbf{e^{i\,b}}$; er soll hier zunächst nur durch die folgende Definition erklärt werden.

Def. 2 (Euler‘ sche Formel): $\mathbf{e^{i\,\varphi}} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ **.**

Warum dies eine sinnvolle Definition ist, zeigen die folgenden Anwendungen.
Wie man auf diese Definition kommt (und das sie sogar zwingend ist), wird noch gezeigt.

3. Exponentialdarstellung. Komplexe Wurzeln

Es gibt für komplexe Zahlen:

- die kartesische Darstellung $z = x + i\,y = (x , y)$;
  vorteilhaft für die Addition und die Darstellung in der Gauß'schen Ebene; Multiplikation so wie in **R**

- die Polardarstellung $z = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$;
  veranschaulicht die Multiplikation als Drehstreckung bzw. -stauchung

  Achtung: wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen ist die **Polardarstellung nicht eindeutig**:
  $z = x + i\,y = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi) = |z| (\cos(\varphi + k * 2\pi) + i \sin(\varphi + k * 2\pi))$, $k \in$ **Z** .

Aus $z = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ folgt mit Hilfe der Euler'schen Formel:

Def. 1 :

- die **Exponentialdarstellung** $z = |z|\ e^{i\,\varphi}$;
  vorteilhaft für die Multiplikation, Division und das Potenzieren

Bspl.

Def. 2 (komplexe n-te Wurzel)

Sei $z \in \mathbf{C}$. Jede Zahl $u \in \mathbf{C}$, für die gilt $u^{\mathbf{n}} = z$, heißt **komplexe** n-te Wurzel aus z.

Satz 1

Sei $z \in \mathbf{C}$, $u \in \mathbf{C}$. Es gibt genau n komplexe n-te Wurzeln aus z , d.h.

die Gleichung $u^n = z \Leftrightarrow u^n - z = 0$ hat genau n Lösungen.

Man findet diese Lösungen (also die n komplexen n-ten Wurzeln aus z) durch die systematische Auswertung des **mehrdeutigen** Symbols $z^{\mathbf{1/n}}$.

Bspl.

Bem.

Sei $z \in \mathbf{C}$. $p(z) = z^n + a_0$ ist ein spezielles komplexes Polynom n-ten Grades.

Seine Nullstellen sind die Lösungen der Gleichung $z^n + a_0 = 0 \Leftrightarrow z^n = \mathbf{-}\, a_0$.

Diese Gleichung hat genau **n** Lösungen, nämlich die **n** komplexen n-ten Wurzeln aus $\mathbf{-}\, a_0$ (s. Def. 2 und Satz 1)

Dieses Polynom **n-ten Grades** hat also genau **n** Nullstellen. Dies gilt für jedes komplexe Polynom n-ten Grades (wenn man die Vielfachheit einer Nullstelle mit berücksichtigt).

Dies nennt man den **Fundamentalsatz der Algebra**.

Wenn das komplexe Polynom nur reelle Koeffizienten hat, treten die komplexen Nullstellen stets paarweise auf: Ist $z_0 = a + i\,b$ (mit $b \neq 0$) eine Nullstelle, so ist auch die dazu konjugiert komplexe Zahl z_0^{*} eine Nullstelle.