

6. Einige Anwendungen der Differentialrechnung

A) Beispiele für physikalisch-technische Anwendungen (die Ableitung als Veränderungsrate)

Die unabhängige Variable t steht für die Zeit, x für die Ortskoordinate. Ableitungen nach der Zeit werden mit einem Punkt, Ableitungen nach dem Ort mit einem Strich gekennzeichnet.

1) Ort(svektor) einer Masse: $\vec{r}(t)$,

(Momentan-) Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$

(Momentan-) Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

2) bis zum Zeitpunkt t geleistete Arbeit: $W(t)$, (Momentan-) Leistung: $P(t) = \dot{W}(t)$

3) elektrische Ladung: $Q(t)$, Strom: $I(t) = \dot{Q}(t)$

4) Biegelinie eines beidseitig eingespannten Balkens: $y(x)$,

Streckenlast: proportional zu $y^{(4)}(x) = y''''(x)$

5) elektrische Spannung $U(x)$, elektrisches Feld $E = U'(x)$

(es soll nur die Abhängigkeit von einer Ortskoordinate bestehen)

B) Geometrische Anwendungen (die Ableitung als Steigung)

Wir betrachten eine ebene Kurve, die durch die Funktion $y = f(x)$ beschrieben wird (sie ist der Graph dieser Funktion).

1) Steigung der Kurve im Punkt $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$: $f'(x_0)$

2) Gleichung der Tangente an den Graphen von $y = f(x)$ im Punkt (x_0, y_0) :

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) ;$$

für den Schnittwinkel dieser Tangente mit der x-Achse gilt: $\tan(\alpha) = f'(x_0)$.

3) Krümmung der Kurve:

$$K(x) = \frac{f''(x)}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}} \quad , \quad \text{Krümmungsradius} \quad r(x) = \frac{1}{|K(x)|} \quad .$$

Die zweite Ableitung bestimmt also das Krümmungsverhalten:

Ist $f''(x) > 0$, ist die Kurve linksgekrümmt.

Ist $f''(x) < 0$, ist die Kurve rechtsgekrümmt.

Hat $f''(x)$ an der Stelle x_0 eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, liegt ein

Wendepunkt vor.

C) Kritische Punkte einer Funktion

Def. 1

Die kritischen Punkte einer differenzierbaren Funktion sind solche mit waagrechter Tangente: die erste Ableitung an diesen Stellen ist also Null. Man unterscheidet: Extremwerte (Minimum oder Maximum) und Sattelpunkte.

Satz 1

Wir setzen voraus, dass die Funktion $f(x)$ im untersuchten Bereich ausreichend oft differenzierbar ist, mindestens zweimal ($f'(x)$ ist dann stetig und $f(x)$ ist stetig differenzierbar; $f''(x)$ soll zumindest stetig sein).

Die kritischen Punkte der Funktion werden ermittelt durch Lösen der Gleichung:

$$f'(x) = 0.$$

Sei x_k eine Lösung dieser Gleichung. Wenn man den Typ des kritischen Punktes $(x_k, f(x_k))$ ermitteln will, muss man zusätzliche Untersuchungen durchführen:

a) ein Extremwert liegt vor, wenn für die zweite Ableitung gilt: $f''(x_k) \neq 0$. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, kann man noch keine Aussage über die Natur des kritischen Punktes treffen. Man muss dann (b) oder (c) prüfen.

Wenn für die zweite Ableitung gilt: $f''(x_k) > 0$, liegt ein Minimum vor.

Wenn für die zweite Ableitung gilt: $f''(x_k) < 0$, liegt ein Maximum vor.

b) ein Extremwert liegt vor, wenn für die erste Ableitung gilt: sie wechselt an ihrer Nullstelle x_k auch das Vorzeichen. Tut sie das nicht, liegt ein Sattelpunkt vor. Wechselt die erste Ableitung das Vorzeichen von $+$ nach $-$, liegt ein Maximum vor. Wechselt die erste Ableitung das Vorzeichen von $-$ nach $+$, liegt ein Minimum vor.

c) ein Extremwert liegt vor, wenn die erste von Null verschiedene Ableitung $f^{(n)}(x_k)$ gerades n hat. In diesem Fall gilt: für $f^{(n)}(x_k) > 0$ liegt ein Minimum vor, für $f^{(n)}(x_k) < 0$ ein Maximum. Ein Sattelpunkt liegt vor, wenn n ungerade ist.

Bemerkung: spezielle Situationen

1)

Soll die Funktion $f(x)$ nur im Intervall $[a, b]$ untersucht werden, z.B. weil das Problem diese Intervallgrenzen vorgibt, so müssen die Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ gesondert betrachtet werden. $f(a)$ könnte ja größer (kleiner) als alle anderen Funktionswerte in diesem Intervall sein: dann wäre $f(a)$ das absolute Maximum (Minimum). Analoges gilt für $f(b)$. An den Grenzen des Intervalls muss die Ableitung aber nicht Null sein.

2)

Ist die Funktion im Inneren ihres Definitionsbereichs an einer Stelle x_0 nicht differenzierbar, so muss man extra untersuchen, ob hier vielleicht ein lokales Extremum vorliegt. Der Funktionswert $f(x_0)$ könnte ja größer (kleiner) sein als alle anderen Funktionswerte in der Umgebung (Nachbarschaft; Nähe) von x_0 . Dann ist $f(x_0)$ ein lokales Maximum (Minimum).

3)

Ist die Funktion im Inneren ihres Definitionsbereichs an einer Stelle x_0 nicht stetig, so muss die Untersuchung der kritischen Punkte in den Teilbereichen $x < x_0$ und $x > x_0$ stattfinden. Dies gilt natürlich erst recht, wenn die Funktion bei x_0 nicht definiert ist.

4)

Die Funktion ist nicht auf einem Intervall, sondern nur an einzelnen Punkten definiert, wie dies typischerweise bei einer Messung der Fall ist. Dann muss man die Funktionswerte selber untersuchen, um ein Extremum zu finden.