Integralrechnung für Funktionen einer Variablen

1. Problemstellung

Problem A:

Berechnung des Flächeninhalts einer krummlinig begrenzten Fläche; hier die Fläche A(a, b) zwischen dem Graphen von f(x) und der x-Achse für a $\leq x \leq$ b
(f(x) $\geq$ 0 im Intervall [a, b]) .

Bild:

Problem B:

Gegeben ist die Funktion f(x) sowie die Information, dass f(x) die Ableitung einer noch zu bestimmenden Funktion g(x) ist: f(x) = g'(x) .
Bem.: g heißt dann Stammfunktion zu f .

Bspl.:

Es wird gezeigt werden, dass die Integralrechnung beide Fragen systematisch beantwortet. Hier ein
Bspl. :

2. Flächenberechnung als Grenzprozess

Idee (wichtig!!) :

die gesuchte Fläche A(a,b) wird in n Streifen unterteilt; die x-Grenzen des i-ten Streifens S_i sind $\bar{x}_{i-1}$ und $\bar{x}_i$, also gilt für den Streifen $\bar{x}_{i-1} \le x \le \bar{x}_i$.

Die Stellen $\bar{x}_1$ bis $\bar{x}_{n-1}$ bilden eine <u>willkürliche</u> Einteilung des Intervalls [a, b] ;

$\bar{x}_0$ = a , $\bar{x}_n$ = b . Es gilt: A(a,b) = $\sum_{i=1}^{n} S_i$.

In jedem Streifen wählt man <u>willkürlich</u> eine Zwischenstelle (Stützstelle) x_i , deren Funktionswert f(x_i) als Höhe eines Rechtecks R_i genommen wird. Die Fläche des Rechtecks ist gegeben durch $R_i = f(x_i)\ \Delta x_i$, wobei $\Delta x_i = \bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}$. Jeder Streifen S_i wird so durch ein Rechteck R_i approximiert: $S_i \approx R_i$, und damit:

$$A(a,b) \approx \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x_i \ .$$

Jetzt lässt man $n \to \infty$ gehen (immer mehr und immer feinere Streifen). Resultat:

Satz 1:

Sei f(x) stetig und positiv in [a, b] . Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ = A(a,b) , sofern $\Delta x_i \to 0$. Der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung und der Wahl der Stützstellen. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ heißt Riemann' sche Summe RS (zur gewählten Zerlegung für die gewählten Stützstellen).

Bspl.

Für einige Funktionen haben wir diesen Grenzprozess explizit durchgeführt.

Funktion f(x)	Fläche A(a,b)	Bemerkung
x	$(b^2 - a^2)/2$	a,b > 0
x^2	$(b^3 - a^3)/3$	s. Übung
$1/x$	$\ln(b) - \ln(a)$	a,b > 0 , ln(x) natürlicher Log.
e^x	$e^b - e^a$	s. Abschnitt 6

3. Das bestimmte Integral

A) Definition

Man löst sich vom geometrischen Problem und lässt auch **f(x) < 0** zu.
Untersucht wird wieder die Riemann'sche Summe RS, wobei jetzt negative Summanden auftreten können.

Satz 1:

Sei f(x) **stetig** in [a, b] . Dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ (sofern $\Delta x_i \to 0$) unabhängig von der Wahl der Zerlegung und der Wahl der Stützstellen.

Man nennt ihn das bestimmte Integral von f über [a,b] . Schreibweise: $\int\limits_a^b f(x)dx$;

f heißt Integrand, x Integrationsvariable, a ist die untere und b die obere Integrationsgrenze, [a,b] ist der Integrationsbereich.

Bem.:

1) Das Integral kann positiv, negativ oder Null sein.
2) Das Integralzeichen ist ein stilisiertes Summensymbol.
„Rezept" für den Grenzübergang: $\sum \to \int$, $\Delta x \to dx$.

Satz 2

Integrand f(x)	$\int_a^b f(x)dx$	Bemerkung
(1) x^n	$(b^{n+1} - a^{n+1}) / (n+1)$	$n \in \mathbf{R}$, $n \neq -1$
(2) 1/x	ln(|b|) – ln(|a|)	Betragstriche beachten
(3) e^x	$e^b - e^a$	

Der Integrand muss in [a,b] stetig sein: dies führt bei (1) und (2) zu Einschränkungen an den Integrationsbereich. Bspl:

für n=1/2 ist f(x) = $\sqrt{x}$ nur für $x \geq 0$ definiert.

für n= - 1/2 ist f(x) = $1/\sqrt{x}$ nur für x > 0 definiert.

für n= -1 ist f(x) = 1/x nur für $x \neq 0$ definiert.

Beweis

(1)

Bei dem im vorherigen Abschnitt diskutierten Fall n=1 spielt das Vorzeichen der Funktion für die Berechnung keine Rolle. Für n=2 ist f(x) ohnehin ≥ 0. Für allgemeines n erfolgt der Beweis über den Hauptsatz (Abschnitt 6).

(2)

Die Rechnung kann für x < 0 entsprechend modifiziert werden.

(3)

e^x ohnehin > 0, die Berechnung kann also übernommen werden.

Bem.

1) Abkürzende Schreibweise: F(b) – F(a) = $[\,F(x)\,]_a^b$, also z.B. $e^b - e^a = [\,e^x\,]_a^b$.

2) $\int_a^b \{-f(x)\}dx = - \int_a^b f(x)dx$, da $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\{-f(x_i)\}\Delta x_i = - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$.

3) das bestimmte Integral ist eine Zahl; die Integrationsvariable tritt im ausgewerteten Integral nicht mehr auf.

B) Bestimmtes Integral und Fläche

Satz 3 (Flächenberechnung durch Integration, also Lösung von Problem A)

(1) A(a, b) = $\int_a^b |f(x)|\,dx$; Betragstriche beachten !

An den Nullstellen von f(x) mit Vorzeichenwechsel wird das Intergral aufgeteilt (s.a. Abschnitt 4). Die Betragstriche können entfallen, wenn f(x) positiv ist, ansonsten werden sie durch ein Minuszeichen ersetzt:

$|f(x)| = f(x)$, wenn $f(x) \geq 0$

$|f(x)| = -f(x)$, wenn $f(x) \leq 0$.

(2) Die Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen f(x) und g(x) ist gegeben durch

AZ(a, b) = $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$; Betragstriche beachten !

An den Nullstellen der Differenz mit Vorzeichenwechsel (den Schnittpunkten der Funktionen f(x) und g(x)) wird das Integral aufgeteilt (s.a. Abschnitt 4). Die Betragstriche können entfallen, wenn die Differenz positiv ist, ansonsten werden sie durch ein Minuszeichen ersetzt:

$|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$, wenn $f(x) \geq g(x)$

$|f(x) - g(x)| = -(f(x) - g(x))$, wenn $f(x) \leq g(x)$

4. Eigenschaften des bestimmten Integrals

Wir setzen voraus, dass alle Funktionen in [a,b] integrierbar sind. Die anschauliche Argumentation über die Fläche setzt voraus, dass der Integrand positiv ist.

(1) Es kommt nicht auf den Namen der Integrationsvariablen an:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(\tilde{x})d\tilde{x} .$$

(2) **Satz 1:**

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

(3) **Satz 1a:** Obere Grenze = untere Grenze:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

(4) **Satz 2** (**Additivität** des Integrals)

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

(5) **Satz 3** (**Linearität** des Integrals)

$$\int_a^b \{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\}dx = \int_a^b \{c_1 f_1(x)\}dx + \int_a^b \{c_2 f_2(x)\}dx$$

$$= c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx$$

(6) **Satz 4** (**<u>Monotonie</u>** des Integrals)

Sei $f_1(x) \le f_2(x)$ in [a,b] . Dann gilt: $\int_a^b f_1(x)dx \le \int_a^b f_2(x)dx$.

(7) **Satz 5** (Symmetrie des Integranden)

Ist $f(x)$ eine gerade Funktion, gilt: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Ist $f(x)$ eine ungerade Funktion, gilt: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

5. Integrierbarkeit; Mittelwertsatz

Satz 0 (s. Abschnitt 3)

Eine in [a,b] **stetige** Funktion ist in [a,b] integrierbar.

Bem.

Es sind also viel mehr Funktionen integrierbar als differenzierbar.

Bspl.: f(x) = |x| ; f(x) ist überall stetig und damit überall integrierbar, aber bei x= 0 nicht differenzierbar.

Satz 1

Sei f(x) in [a,b] **beschränkt und stetig bis auf endlich viele Stellen**.

Dann ist f(x) in [a,b] integrierbar.

Bspl.

Satz 2 (Mittelwertsatz)

Sei f(x) stetig in [a,b] . Dann gibt es mindestens ein $\bar{x} \in$ [a,b] mit

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)\, f(\bar{x}).$$

Anwendung: Definition eines Mittelwertes $\bar{f}$ von f(x) in [a,b]

$$f(\bar{x}) = \bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \,.$$

6. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Bisher: Integration = Grenzwert der Riemann'schen Summe RS

Jetzt: Integration = Stammfunktion finden

Def. 1 (Stammfunktion)

Sei F(x) differenzierbar . Die Ableitung $F'(x)$ soll mit f(x) bezeichnet werden:

$F'(x) = f(x)$. Dann heißt F(x) eine **Stammfunktion** zu f(x) .

Bem.

Jede differenzierbare Funktion f(x) ist also Stammfunktion zu ihrer eigenen Ableitung:

f(x) ist Stammfunktion zu $f'(x)$.

Bspl.

Satz 1

Zwei Stammfunktionen von f(x) können sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden, d.h. ist F(x) eine Stammfunktion, so ist F(x) + C **die allgemeine** Stammfunktion.

Beweis

Bspl.

Kleine Tabelle von Stammfunktionen, erstellt durch „Aufleiten“
(man benutzt die Kenntnisse über das **Ab**leiten)

f(x)	F(x)	Bem
x^n	x^{n+1} / (n+1)	$n \neq -1$
$1/x = x^{-1}$	ln(|x|)	
e^{ax}	e^{ax} / a	gilt auch für **komplexes** a
cos(ax)	sin(ax) / a	
sin(ax)	**-** cos(ax) / a	

Allgemeine Stammfunktion: F(x) + C

Beweis durch Probe: $F'(x) = f(x)$!

Def. 2 (Integralfunktion)

Sei f(x) integrierbar. Dann heißt $I(x) = \underline{\int_a^x f(\tilde{x})d\tilde{x}}$ eine **Integralfunktion** von f(x) .

Bspl.

Satz 2 (der Hauptsatz)

Für **<u>stetige</u>** Funktionen f(x) ist die Integralfunktion auch Stammfunktion, d.h.

$I'(x) = f(x)$; in Worten: die Ableitung der Integralfunktion (nach ihrem Argument, der oberen Grenze) ergibt den Integranden an der oberen Grenze.

Bspl.

Wir fassen die Erkenntnisse aus den Beispielen zusammen:

Satz 2a (Anwendungen des Hauptsatzes; oft auch selbst als Hauptsatz bezeichnet)

(1) Gesucht ist $\underline{\int_a^b f(x)dx}$.

Weg 1: Grenzprozess (sofern durchführbar)

Weg 2: (über Hauptsatz)

Wenn man <u>eine</u> Stammfunktion F(x) des stetigen Integranden kennt, gilt:

$\underline{\int_a^b f(x)dx}$ = F(b) – F(a)

(**Berechnung eines Integrals über die Stammfunktion)**

Beweis:

Aus der Definition der Integralfunktion I (x) = $\underline{\int_a^x f(\tilde{x})d\tilde{x}}$ folgt für das

gesuchte bestimmte Integral $\underline{\int_a^b f(x)dx}$ = $\underline{\int_a^b f(\tilde{x})d\tilde{x}}$ = I (b) .

Wir müssen also I (b) ermitteln. Dies geht über die Stammfunktion:
wir gehen ja davon aus, dass wir eine Stammfunktion F(x) kennen.
I (x) ist auch Stammfunktion (**Satz 2**) , also muss I (x) = F(x) + C (**Satz 1**).

Die Konstante C hat einen speziellen Wert, da I (a) = $\underline{\int_a^a f(\tilde{x})d\tilde{x}}$ = 0 .

I (a) = F(a) + C = 0 $\Rightarrow$ C = - F(a) . Damit gilt: I (x) = F(x) - F(a) und

I (b) = $\underline{\int_a^b f(\tilde{x})d\tilde{x}}$ = $\underline{\int_a^b f(x)dx}$ = F(b) - F(a) . Wir haben also I (b) und damit das bestimmte Integral mit Hilfe einer Stammfunktion berechnet.

(2) Gegeben ist die stetige Funktion f(x) sowie die Information f(x) = g'(x) .

Gesucht ist g(x), also eine Stammfunktion zu f(x). Zusatzbedingung:
es soll g(a) vorgegeben sein.

Weg 1: Aufleiten (also kenntnisreiches Raten der Stammfunktion), sofern möglich.

Weg 2: über den Hauptsatz. Wir suchen eine Stammfunktion. Die Integralfunktion <u>ist</u> eine Stammfunktion (**Satz 2**).

$$I(x) = F(x) = \underline{\int_a^x f(\tilde{x})d\tilde{x}} = \underline{\int_a^x g'(\tilde{x})d\tilde{x}}$$

F(x) ist die übliche Bezeichnung der Stammfunktion zu f(x); die untere Grenze a wurde passend zur obigen Zusatzbedingung gewählt.
Die gesuchte Funktion g(x) ist Stammfunktion zu ihrer Ableitung
g'(x) = f(x) , also muss g(x) = F(x) + C (**Satz 1**).
Die Konstante C wird durch die Zusatzbedingung festgelegt:

g(a) = F(a) + C = 0 + C $\Rightarrow$ C = g(a) . Damit: $g(x) = \underline{\int_a^x g'(\tilde{x})d\tilde{x}} + g(a)$

(Berechnung der Stammfunktion durch Integration, also Lösung von Problem B) .

Bem.

Aus der letzten Formel folgt: g(b) - g(a) = $\int_a^b g'(x)dx$.

Dieses Ergebnis soll noch einmal interpretiert werden.
g(b) - g(a) ist die (Gesamt-) Veränderung des Funktionswertes in [a,b], also wenn man von x=a nach x=b geht.

Wir erinnern uns, dass die Ableitung g'(x) die momentane **Veränderung**srate der Funktion g(x) ist. Was bedeutet dann das Intergral mit diesem speziellen Integranden?
Dazu stellen wir uns vor, dass das Integral über den bekannten Grenzprozess erzeugt wird: wir unterteilen [a,b] wieder in Streifen $\bar{x}_{i-1} \le x \le \bar{x}_i$ (s. Abschnitt 2) und wählen Stützstellen x_i .

Das Differential dg = g'(x_i) Δx_i approximiert die Veränderung des Funktionswertes Δ g(x_i) = g($\bar{x}_i$) - g($\bar{x}_{i-1}$) in diesem Streifen. Die Gesamtveränderung in [a,b], also g(b) - g(a), wird dann durch die Riemann'sche Summe $\sum_{i=1}^{n}$ g'(x_i) Δx_i approximiert.

Der Grenzwert liefert das obige Integral.

Def. 3
Die allgemeine Stammfunktion F(x) + C heißt auch **das unbestimmte Integral** von f(x), da es – im Gegensatz zum bestimmten Integral – noch die unbestimmte Integrationskonstante C enthält. Schreibweise: $\int f(x)dx$; so kann man formal knapp notieren, dass man die Stammfunktion sucht.

Bem.
Unsere kleine Tabelle von Stammfunktionen ist also zugleich eine Tabelle von unbestimmten Integralen. In den Formelsammlungen sind ausführliche Integraltafeln. Wichtig: die Systematik dieser Tabellen kennen lernen! In der Regel wird dort die Integrationskonstante nicht aufgeführt: unbedingt selber ergänzen.

Satz 2b (Anwendungen des Hauptsatzes, formuliert mit dem unbestimmten Integral)

(1) Sei F(x) eine Stammfunktion zu f(x). Dann:

$\int_a^b f(x)dx$ = F(b) – F(a) (**Satz 2a**)

= (F(b) + C) – (F(a) + C) (**Übergang zur allgemeinen Stammfunktion**)

= $[\ F(x) + C\ ]_a^b$ = $[\ \int f(x)dx\ ]_a^b$ (Kurznotation s. Abschnitt 3)

Um ein bestimmtes Integral zu berechnen, kann man sich zunächst das unbestimmte Integral beschaffen.

(2) Gegeben sei f(x) = g**'**(x) . Die gesuchte Stammfunktion g(x) kann man zunächst nur bis auf die Integrationskonstante C bestimmen: g(x) = $\int f(x)dx = \int g'(x)dx$.

Dies ist die kürzeste Notation zur Lösung von Problem B .
Die Integrationskonstante C wird durch eine zusätzliche Angabe festgelegt.

Bspl.

Beweis des Hauptsatzes

7. Weitere Beispiele

8. Integrationstechniken

Die Berechnung des Intergrals über den Grenzwert der Riemann’schen Summe RS ist meist mühsam und nicht immer praktikabel. Auch das geschickte Raten einer Stammfunktion hat seine Grenzen. Also braucht man andere Techniken zur systematischen Ermittlung von Integralen, so wie wir ja auch Ableitungsregeln erlernt haben, die uns die Berechnung der Ableitung ohne expliziten Grenzprozess ermöglichen. Die Techniken „Partielle Integration“ und „Integration durch Substitution“ beruhen tatsächlich auf den Ableitungsregeln „Produktregel“ bzw. „Kettenregel“. Die „Summenregel“ haben wir ja schon im Abschnitt 4 als „Linearität des Integrals“ notiert.

Es gibt vier solcher Integrationstechniken, wobei die Näherungsverfahren (Punkt D) eine Sonderrolle spielen.

A) Partielle Integration
B) Integration durch Partialbruchzerlegung (Integration gebrochen rationaler Funktionen)
C) Integration durch Substitution
D) Integration durch Approximation