

Prof. Dr. D. Hackenbracht
Frankfurt University of Applied Sciences (FRA UAS)
Fachbereich 2 - Informatik und Ingenieurwissenschaften
email: hackenbr@fb2.fra-uas.de

23. 5. 2019

Neue Berechnungen zu einem alten Problem

(Korrigierte und erweiterte Fassung vom 23. 5. 2019)

Ich freue mich, Ihnen über eine Fragestellung berichten zu können, die ich in letzter Zeit bearbeitet habe, nämlich die

Selbstinduktivität eines ringförmigen Leiters.

In diesem Vortrag geht es mir aber nicht nur um diesen Gegenstand, sondern auch um das **Werkzeug** und die **Methodik**:

Ich möchte Sie für **Computeralgebra** interessieren und zu sorgfältiger **Absicherung eigener Ergebnisse** anregen (Hinweise dazu sind im Text **blau** markiert).

Dieser Bericht ist als **Arbeits- und Zwischenbericht** zu verstehen. Insbesondere das mit dem Computeralgebra-System **Mathematica** © geschriebene Programm bedarf noch einer gründlichen **Überarbeitung** (z.B. Modularisierung); anstehende Arbeiten sind **magentafarben** markiert.

Ein solcher **Bericht** ist ein wichtiger Schritt zur Konsolidierung der Ergebnisse: die Argumentation wird überprüft, die Wortwahl präzisiert, die Quellen zitiert, man wird auf Fehler und fehlende (insbesondere numerische) Berechnungen aufmerksam, die noch ergänzt werden müssen. Eine Entschuldigung sei vorangestellt: in den Bildern, die dem Mathematica-Programm entnommen wurden, fehlen leider die Achsenbezeichnungen.

1. WAS? (Gegenstand der Untersuchung)

Es geht also um die Selbstinduktivität eines ringförmig gebogenen Leiters (Drahtes). Selbstinduktivität, was ist das? Ein Strom I in einem Leiter erzeugt ein Magnetfeld. Ändert sich der Strom, ändert sich das Magnetfeld. Nach dem Faraday'schen Gesetz induziert diese Änderung ein elektrisches Wirbelfeld und in der Folge im Leiter einen zusätzlichen Strom derart, dass dieser der Änderung von I entgegen wirkt (diese hemmende Wirkung ist auch als Lenz'sche Regel bekannt). Diese Rückkopplung heißt Selbstinduktion [Bro, Induktion], der zugehörige Koeffizient **Selbstinduktivität** (kurz: Induktivität); in diesem Bericht wird er abgekürzt mit dem üblichen Symbol L .

Der ringförmige Leiter ist geometrisch ein **Torus** (Bild 1) mit zwei charakteristischen Längen, dem mittleren Radius a und dem Querschnitts-Radius R (Bild 2). Er besitzt Rotations- und Spiegel-Symmetrie.

Bild 1: Torus („Rettungsring“)

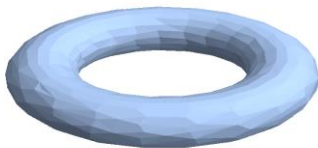
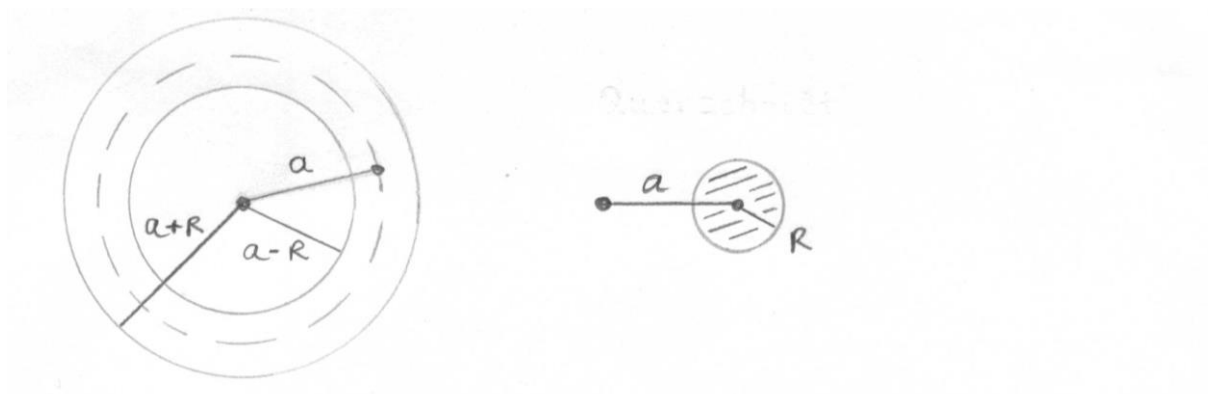


Bild 2: Die charakteristischen Längen und ein typischer Querschnitt



Die Stromverteilung ist somit räumlich begrenzt (anders als bei unendlich langen geraden Leiteranordnungen) und ebenfalls rotations-symmetrisch. Sie ist dem Betrage nach beschränkt (anders als bei einem Ring ohne Querschnitt, i.e. $R = 0$: da muss die Delta-Funktion zur Beschreibung der Stromverteilung benutzt werden)

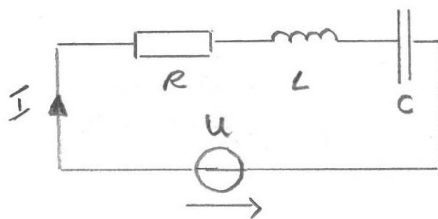
und soll auf dem Querschnitt homogen sein (Annahme: der Skin-Effekt kann vernachlässigt werden, s. Kap. 3).

2. WARUM? (Motivation)

Ein Kollege, Prof. Dr. E. Jacobson (ebenfalls FRA UAS), hat mich auf das Problem aufmerksam gemacht. Herr Jacobson ist in internationalen Normungsgremien tätig. Im vorliegenden Fall geht es ihm um Definition und Messung der in einem Leiter **selbst**-induzierten Spannung, die eng mit der Selbstinduktivität L des Leiters zusammen hängt: $U_L = -L \frac{dI}{dt}$ (s.a. Kap. 3, Bem. 1).

Die (Selbst-) Induktivität L ist ein wichtiger Parameter in elektrischen Netzwerken, neben dem Ohm'schen Widerstand R und der Kapazität C (der Ohm'sche Widerstand wird mit kursiv gesetztem R bezeichnet, um ihn vom Querschnitts-Radius R zu unterscheiden). Man denkt sich R, L und C in speziellen Bauteilen konzentriert [Bos III, S.10]. Ein Beispiel für ein solches Netzwerk ist der Serien-Schwingkreis (Bild 3).

Bild 3: Serien-Schwingkreis



Die hemmende Wirkung der Induktivität kann man gut an einem anderen Beispiel erkennen, nämlich am (zeitlichen) Verlauf des Stromes in einem R - L -Glied (Bild 4).

Bild 4: R - L -Glied; Stromverlauf nach Anlegen der Spannung V_ε (aus: [Alo, p.635])

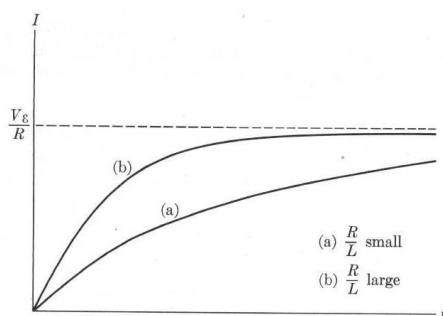


Fig. 17-14. Establishment of a current in a circuit.

Die Selbstinduktivität bewirkt im R - L -Glied den allmählichen Anstieg des Stroms, bis dieser seinen Endwert $I_\varepsilon = V_\varepsilon / R$ erreicht. Analog gilt beim Abklemmen der

Spannungsquelle V_ε (bei weiterhin geschlossenem Stromkreis), dass der Strom nur allmählich auf Null abklingt. Die Spule wirkt jetzt als Spannungsquelle, s. z.B. [Alo, p.636].

In der Literatur werden leicht unterschiedliche Näherungsformeln für die Induktivität eines „dünnen“ Rings (Annahme $R \ll a$) genannt. Auch dies war eine Motivation, **das Problem genauer und ohne die einschränkende Annahme zu untersuchen** und dabei die Möglichkeiten von **Mathematica** zu nutzen.

Die Ergebnisse sind in Kapitel 5.3 zusammengestellt.

3. WIE? (Teil 1: Theorie)

Hier helfen [Bücher](#). Die folgenden Formeln findet man z.B. in [JaC], [JaK].

Dort wird (wie auch in [Bro], [Ell], [Leo]) die Selbstinduktivität L definiert über die Energie W , die im Magnetfeld \vec{B} der Stromverteilung (Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$, Gesamt-Strom I) gespeichert ist:

$$W =: \frac{1}{2} L I^2 . \quad (1)$$

Für die magnetische Energie gilt (in SI-Einheiten):

$$W = \frac{1}{2} \int_{VS} \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) d^3r \quad (2)$$

$$= \frac{\mu_0}{8\pi} \int_{VS} \int_{VS} \vec{j}(\vec{r}) \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' d^3r \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0^{-1} \int_V \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) d^3r . \quad (4)$$

VS ist das Volumen der Stromverteilung, $V = \mathbb{R}^3$ ist der ganze Raum.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{VS} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \text{ ist das Vektorpotential am Ort } \vec{r} \text{ (s.a. Bem. 3),} \quad (5)$$

μ_0 ist die Permeabilität des Vakuums.

Den Stromdichte-Vektor kann man immer schreiben als $\vec{j}(\vec{r}) = I \vec{f}(\vec{r})$

(s. z.B. [Ell, p. 310]). Damit ergibt sich aus (3) unmittelbar der Faktor I^2 in (1).

Der Proportionalitätsfaktor L ist durch die Geometrie des Leiters und durch die Ortsabhängigkeit $\vec{f}(\vec{r})$ der Stromdichte bestimmt:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{VS} \int_{VS} \vec{f}(\vec{r}) \cdot \frac{\vec{f}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' d^3r \quad (3a)$$

Die Äquivalenz der Formeln (2) – (4) ist gegeben, weil [hier](#) die [Voraussetzungen dafür erfüllt](#) sind: **die Stromverteilung ist lokal und beschränkt.**

Zusätzlich ist sie **rotations-symmetrisch und homogen**. Die Feldlinien des Stromdichte-Vektors $\vec{j}(\vec{r})$ sind konzentrische Kreise (z.B. der Kreis mit Radius a , s. Bild 2). Die Richtung von $\vec{j}(\vec{r})$ ist gegeben durch \vec{e}_n , den Einheitsvektor der Flächennormalen auf einem Torus-Querschnitt. So wie die Fließrichtung des Stromes soll auch \vec{e}_n im mathematisch positiven Sinn orientiert sein. Mit „Querschnitt“ ist die Fläche gemeint, für die ein Repräsentant in Bild 2 (die Kreisfläche mit Radius R)

gezeigt wird. Wegen der Homogenität ist $|\vec{j}(\vec{r})|$ auf einem Querschnitt **konstant**.

Es gilt daher:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_n = : j \vec{e}_n \text{ im Torus, } \vec{j}(\vec{r}) = 0 \text{ außerhalb.} \quad (6)$$

Die Formeln eröffnen **verschiedene Berechnungswege und damit Möglichkeiten zur Absicherung des Ergebnisses, insbesondere der numerischen Berechnungen**.

Die Formeln machen keine Einschränkung bezüglich der charakteristischen Längen des Torus (bis auf die triviale Bedingung $R \leq a$). **Die hier vorgestellte numerische Berechnung erlaubt daher auch die Untersuchung „dicker“ Drähte.**

Es gibt allerdings eine wichtige Einschränkung, nämlich dass der sog. Skin-Effekt vernachlässigt werden kann. Darunter versteht man das Phänomen, dass der Strom nur noch in einer Schicht an der Leiteroberfläche fließt.

Bei Gleichstrom gibt es keinen Skin-Effekt. Die Stromverteilung ist homogen auf dem Leiterquerschnitt. Die Eindringtiefe d , welche den Skin-Effekt charakterisiert, kann als unendlich groß angenommen werden.

Bei Wechselstrom mit niedriger Frequenz ist das System zwar quasistatisch (der Verschiebungsstrom in den Maxwell-Gleichungen kann vernachlässigt werden), aber die Eindringtiefe ist nur noch endlich. Die Stromdichte in der Mitte des Leiters hat etwa den Wert $j_s e^{-R/d}$, wobei j_s der Wert an der Oberfläche ist. Für $d = 10 R$ beträgt der Wert in der Mitte ca. 90% des Oberflächenwertes. Die Stromverteilung kann dann noch als annähernd homogen gelten. Für Kupfer beträgt die Eindringtiefe bei einer Frequenz von 50 Hz ca. 9,38 mm [Ger, S. 441; Wiki]. Der Querschnittsradius R sollte dann kleiner als 1 mm sein, damit man von einer annähernd homogenen Stromverteilung sprechen kann.

Der quantitative Einfluss des Skin-Effekts auf die Induktivität soll später untersucht werden (qualitativ kann man schon sagen, dass die sog. innere Induktivität – s. u., Weg 4 – kleiner wird).

Weg 1:

Zuerst wird das Vektorpotential (5) berechnet, dann die Volumen-Integration in (2) durchgeführt; Anknüpfungspunkt: [JaK, S.211], Berechnung des Vektorpotentials für einen Draht ohne Querschnitt ($R = 0$).

Weg 2:

Das Sechsfach-Integral in (3) wird ausgerechnet;

Referenz: [Ell, p.312], Berechnung für einen dünnen Draht ($R \ll a$, insbes. $R \rightarrow 0$).

Weg 3:

(4) benötigt das Magnetfeld; dazu hat man zwei Möglichkeiten:

a) Berechnung durch Differenzieren des Vektorpotentials, da $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

($\nabla \times \dots$) ist die vektor-analytische Operation „Rotation“.

b) Berechnung durch Integrieren gemäß dem Gesetz von Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{VS} \frac{j(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \quad (7)$$

Weg 4:

Es gibt noch eine weitere Möglichkeit zur Berechnung der Selbstinduktivität L ,

nämlich mit Hilfe des magnetischen Flusses. Sei ∂F die Randkurve einer Fläche F .

Der von ∂F „umschlossene magnetische Fluss“ [JaK, S. 243] wird dann definiert als

$$\Phi_m = \iint_F \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}, \quad d\vec{f} \text{ bezeichnet ein Flächenelement von } F. \quad (8a)$$

Andere Bezeichnungen für Φ_m sind „magnetic flux across a surface“ [Alo, p.600]

oder magnetischer „Fluss durch eine beliebig geformte Fläche“ [Bos II, S.36].

Wegen $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ erhält man mit Hilfe des Satzes von Stokes:

$$\Phi_m = \oint_{\partial F} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}; \quad \text{die Randkurve } \partial F \text{ wird zum Integrationsweg.} \quad (8b)$$

Für den vom Leiter umschlossenen Fluss Φ_L soll gelten [Bos II, S.36]:

$$\Phi_L = L I. \quad (8c)$$

Bei der Festlegung der Randkurve ∂F ergibt sich aber ein Problem:

Bei einem Leiter ohne Querschnitt („Leiterschleife“, [JaK, S. 243]) fällt die

Randkurve ∂F mit dem Leiter zusammen; der vom Leiter umschlossene Fluss ist somit über (8b) festgelegt.

Bei einem Leiter mit Querschnitt weiß man dagegen nicht, welche Randkurve zur Berechnung des Flusses herangezogen werden soll (s. [JaK, S.252], [Bos II, S.107]).

Für den Torus gibt es zwar geometrisch ausgezeichnete Kurven (die Kreise mit den

Radien $a - R$, a , $a + R$; s. Bild 2). Aber längs welcher Kurve soll (8b) ausgewertet werden, um dann über (8c) die tatsächliche Induktivität des Leiters zu ermitteln?

Dieses Problem kann man dadurch umgehen, indem die Induktivität L aufteilt wird in eine „äußere“ Induktivität L_{ext} und eine „innere“ Induktivität L_{int} , s. z.B.

[Bro, Induktion], [Bos II, S. 110], [Leo, S. 203]:

$$L = L_{ext} + L_{int} . \quad (9)$$

Die äußere Induktivität L_{ext} kann über den Fluss Φ_K berechnet werden:

$$L_{ext} = \frac{\Phi_K}{I}, \quad \Phi_K = \iint_K \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = \oint_{\partial K} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} , \quad (10)$$

wobei K die Kreisfläche mit Radius $a - R$ (das „Loch“ in der horizontalen Symmetrieebene des Torus) und ∂K der Kreis mit diesem Radius ist.

L_{int} wird mit einer Abwandlung von (1) und (4) ermittelt, nämlich über

$$W_{int} := \frac{1}{2} \mu_0^{-1} \int_{VS} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) d^3r =: \frac{1}{2} L_{int} I^2 , \quad (11)$$

wobei das Integral jetzt nur noch über das Volumen VS der Stromverteilung zu berechnen ist.

Bemerkung 1:

(8b) kann benutzt werden, um für einen Leiter mit Querschnitt einen „mittleren Integrationsweg“ ([Sch]) $\overline{\partial F}$ zu definieren: $\overline{\partial F}$ ist so zu bestimmen, dass das Kurvenintegral in (8b) gerade $L I$ ergibt, wobei L aus (1) oder (9) vorher ermittelt wurde (dieses Vorgehen ähnelt dem Mittelwertsatz der Integralrechnung).

Dann kann der in (8c) auftretende Proportionalitätsfaktor, also L , zu Recht mit dem gleichen Symbol wie der Proportionalitätsfaktor in (1) bezeichnet werden. Mit dem so ermittelten Fluss Φ_L kann man auch bei einem Leiter mit Querschnitt sagen, dass die im Leiter induzierte Spannung gleich der negativen zeitlichen Änderung des Flusses ist (s. z.B. [Alo, p.634], [Bos II, S.60]):

$$U_L = -L \frac{dI}{dt} . \quad (12)$$

Es stellt sich die Frage, ob dieser mittlere Integrationsweg mit der „neutralen Faser“ [Jac] des Magnetfeldes zusammenfällt. Gemeint ist damit die Kreislinie (Radius r_n)

in der horizontalen Symmetrie-Ebene (diese soll jetzt die x-y-Ebene sein, s. Anfang von Kap. 4), auf der das Magnetfeld Null ist. Eine solche Linie muss existieren: Mit $\vec{j}(\vec{r})$ aus (6) ist das Magnetfeld stetig (anders als beim Draht ohne Querschnitt). In der x-y-Halbebene ($x>0$) ist es in z-Richtung orientiert, und zwar für $r < r_n$ in positiver z-Richtung und für $r > r_n$ in negativer („Rechte-Hand-Regel“). Wegen der Stetigkeit muss das Magnetfeld für $r = r_n$ dann Null sein.

Bemerkung 2:

In den Gl. (5) und (7) weist ein Teil des Integranden, nämlich $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ bzw. $\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$, eine Singularität bei $\vec{r} = \vec{r}'$ auf. \vec{r} bezeichnet den Ort, an dem man das Feld $\vec{A}(\vec{r})$ bzw. $\vec{B}(\vec{r})$ berechnet. \vec{r}' bezeichnet den Ort des (infinitesimalen) Stromelements, dessen Beitrag zum Feld man gerade betrachtet. \vec{r}' ist also ein Punkt innerhalb des Volumens VS der Stromverteilung. Die Stelle $\vec{r}' = \vec{r}$ ist bei den Integralen in (2) - (4) nicht vermeidbar, da auch bezüglich \vec{r} (auch) über VS integriert wird. Diese Singularität kann bei realen Stromverteilungen durch Beiträge aus dem Volumenelement d^3r' kompensiert werden, wie sich analytisch zeigen lässt: Dazu betrachtet man einen kleinen kugelförmigen Bereich K_ε um $\vec{r}' = \vec{r}$ mit Radius ε und zeigt, dass dieser für $\varepsilon \rightarrow 0$ keinen Beitrag zum Integral liefert.

Zur konkreten Untermauerung dieses Sachverhaltes könnte man bei der numerischen Integration K_ε aussparen und die Abhängigkeit des Ergebnisses von ε untersuchen. Dies könnte auch zur Verbesserung der numerischen Genauigkeit beitragen.

Bemerkung 3:

Das Integral (5) ist die Lösung der Poisson-Gleichung für das Vektorpotential:

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) . \quad (5a)$$

Dabei wird die Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$ benutzt, s. z.B. [JaC, p.140], [JaK, S. 211]. ($\nabla \cdot \dots$) ist die vektor-analytische Operation „Divergenz“.

Der Differentialoperator Δ ist der Laplace-Operator, hier angewendet auf ein Vektorfeld ([BrS, S.575), [Teu, S.373]). Die Darstellung der Lösung in (5) ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten. Aber nur in kartesischen Koordinaten

separiert (5a) in drei unabhängige Gleichungen für die kartesischen Koordinaten der beteiligten Vektorfelder:

$$\Delta A_i(\vec{r}) = -\mu_0 j_i(\vec{r}), \quad i = x, y, z. \quad (5b)$$

Bei der Ermittlung der Komponenten von $\vec{A}(\vec{r})$ in krummlinigen Koordinaten ist daher Umsicht geboten, s. [JaC, p.141] und Kapitel 4.1.

Es sei noch angemerkt, dass die Richtung von $\vec{A}(\vec{r})$ nicht gleich der Richtung von $\vec{j}(\vec{r})$ sein muss: Zum Vektorpotential am Ort \vec{r} tragen ja viele (infinitesimale) Stromelemente $\vec{j}(\vec{r}') d^3r'$ mit unterschiedlichen Richtungen bei, s. (5). Nun könnten sich diese Beiträge vektoriell so addieren, dass $\vec{A}(\vec{r}) = \lambda(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r})$. Wenn $\lambda(\vec{r}) > 0$, haben $\vec{A}(\vec{r})$ und $\vec{j}(\vec{r})$ in jedem Punkt die gleiche Richtung. Bei der vorliegenden symmetrischen Stromverteilung kann gezeigt werden, dass die beiden Vektorfelder in jedem Punkt zumindest kollinear sind (s. Kap. 4.1).

Näherungsformeln:

Abschließend sollen noch Näherungsformeln für die Selbstinduktivität aufgelistet werden, wie man sie in der herangezogenen Literatur findet. Die Bezeichnungen für die charakteristischen Längen des Torus wurden an die hier verwendeten angepasst, also a für den mittleren Radius und R für den Querschnitts-Radius. $\ln(\dots)$ ist der natürliche Logarithmus. „S.“ steht für Selbstinduktivität.

$$[\text{Bro, Induktion}] : L = \mu_0 a \left(\ln \left(8 \frac{a}{R} \right) - 2 + \mathbf{0.25} \right) ; \mu_0 a \mathbf{0.25} \text{ ist die } \underline{\text{innere S.}}$$

$$[\text{Den}] : L = \mu_0 a \left(\ln \left(8 \frac{a}{R} \right) - 2 + \mathbf{0.25} \right)$$

$$[\text{Ell, Ex. 5.14, p.312}] : L = \mu_0 a \left(\ln \left(8 \frac{a}{R} \right) - \mathbf{1.5} \right) ; \text{ **Korrektur** s. 4.2.2}$$

$$[\text{JaK, Ex. 5.33, S. 272}] : L = \mu_0 a \left(\ln \left(8 \frac{a}{R} \right) - \mathbf{1.75} \right)$$

$$[\text{Küp, S.371}] : L = \mu_0 a \left(\ln \left(8 \frac{a}{R} \right) - 2 \right)$$

$$[\text{Leo, S. 205}] : L = \mu_0 a \left(\ln \left(8 \frac{a}{R} \right) - 2 + \mathbf{0.25} \right) ; \mu_0 a \mathbf{0.25} \text{ ist die } \underline{\text{innere S.}}$$

$$[\text{Stö, S. 453}] : L = \mu_0 a \left(\ln \left(\frac{a}{R} \right) + \mathbf{0.25} \right) ; \text{ Bem.: } \ln(8) - 2 \approx 0 .$$

Bemerkung 4:

Auf die Herleitung der Formeln in [Den], [EII], [JaK] und [Leo] wird in Kap. 4.2.2 eingegangen.

4. WIE? (Teil 2: Durchführung)

Die numerischen Berechnungen, insbesondere die numerischen Integrationen, wurden mit dem **Computeralgebra-System Mathematica**© (Hersteller Wolfram Research) durchgeführt. Einige führten nicht zum Erfolg, was nicht heißt, dass **mit entsprechenden Vorkehrungen (Aufwand oder Ideen)** nicht doch noch ein Ergebnis erzielt werden könnte.

Das kartesische Koordinatensystem wird so gewählt, dass die Mittelachse des Torus die z-Achse ist: Der Torus ist dann symmetrisch bezüglich einer Rotation um diese Achse. Die x-y-Ebene soll die horizontale Symmetrie-Ebene sein: Der Torus ist dann symmetrisch bezüglich einer Spiegelung an dieser Ebene.

Die krummlinigen Koordinaten, die noch eingeführt werden, beziehen sich auf die Achsen dieses kartesischen Koordinatensystems. Wegen der Rotations-Symmetrie des Problems spielt in den verwendeten krummlinigen Koordinaten (Kugel- bzw. „Torus“-Koordinaten, s. Bild 6) die azimutale Winkelkoordinate φ (andere Bezeichnung: ϕ) eine besondere Rolle. \vec{e}_φ ($\equiv \vec{e}_\phi$) ist der zugehörige Einheitsvektor. Die Spiegel-Symmetrie kann bei der Integration ausgenutzt werden (s. Bild 7).

4.1 Weg 1

Relevante Formeln:

$$W =: \frac{1}{2} L I^2 \quad (1)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{VS} \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) d^3r \quad (2)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{VS} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \quad (5)$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_n =: j \vec{e}_n \text{ im Torus, } \vec{j}(\vec{r}) = 0 \text{ außerhalb.} \quad (6)$$

4.1.1 Berechnung des Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r})$

A) Anknüpfungspunkt: Der ringförmige Leiter **ohne** Querschnitt ($R = 0$)

Hier lässt sich das Integral in Formel (5) bei Verwendung von Kugel-Koordinaten (also der Koordinaten r, φ, θ mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$) ein Stück weit analytisch berechnen ([JaC, p.141], [JaK, S.211]). Der Torus entartet zum Kreis. (6) muss neu formuliert werden: Der Stromdichte-Vektor wird mit Hilfe der Delta-

Funktion beschrieben; der Einheitsvektor \vec{e}_n ist \vec{e}_φ . Wegen der Rotations-Symmetrie gilt für die Lösung, die hier mit $\vec{A}J$ bezeichnet wird:

$$\vec{A}J(\vec{r}) = AJ_\varphi(r, \theta)\vec{e}_\varphi, \text{ mit } AJ_\varphi \equiv AJ_y \text{ auf der x-z-Ebene (s. Bem. 3 und Bem. 5).}$$

Das Vektorpotential ist in jedem Punkt kollinear mit dem Stromdichte-Vektor (das Vorzeichen von AJ_φ wurde nicht global untersucht).

Obwohl das Problem damit so weit wie möglich vereinfacht wurde, kann $AJ_\varphi(r, \theta)$ nur mit vollständigen elliptischen Integralen ausgedrückt werden. Diese sind in mathematischen Formelsammlungen tabelliert (s. z.B. [BrS], [Teu]) und stehen in Mathematica als eingebaute Funktionen zur Verfügung. Bei der Programmierung dieser „analytischen“ Lösung muss man [die Unterschiede in den Konventionen zur Definition](#) der elliptischen Integrale beachten.

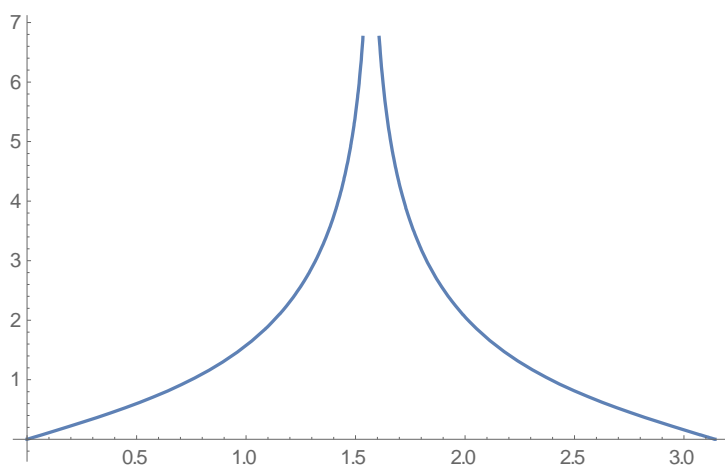
Das Vektorpotential $\vec{A}J$ divergiert auf dem Ring ($r = a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\theta = \pi/2$). Dies ist die Folge des verschwindenden Querschnitts ($R = 0$): die Singularität von $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ kann nicht durch Beiträge aus dem Volumenelement d^3r' kompensiert werden (vergl. Bem. 2). Das so ermittelte Vektorpotential kann daher nicht zur Berechnung der magnetischen Energie W gem. (2) benutzt werden und somit auch nicht zur Berechnung der Selbstinduktivität. Es kann aber zur Kontrolle des Vektorpotentials eines ringförmigen Leiters mit Querschnitt ($R \neq 0$) heran gezogen werden, und zwar im Grenzfall $R \rightarrow 0$ (also $R \ll a$) und im Grenzfall $r \gg a$.

Bild 5: Betrag AJ_φ des Vektorpotentials eines querschnittslosen ringförmigen

Leiters bei $r = a$: $AJ_\varphi(r = a, \theta)$ als Funktion von θ für $0 \leq \theta \leq \pi$

(horizontale Achse); $a = 1$; die Funktionswerte müssen mit $\frac{\mu_0 I}{4\pi}$ multipliziert

werden. Bei $\theta = \pi/2$ (also auf dem Ring) hat AJ_φ eine Singularität.



B) Der Leiter als Torus: Der ringförmige Leiter mit Querschnitt ($R \neq 0$)

$$(6) \text{ lautet jetzt: } \vec{j}(\vec{r}) = j \vec{e}_\varphi \text{ im Torus; } \vec{e}_n \text{ ist also wieder } \vec{e}_\varphi . \quad (6a)$$

Wegen der Rotations-Symmetrie lässt sich wieder zeigen (s. Bem. 5),

dass $\vec{A}(\vec{r}) = A_\varphi(r, \theta) \vec{e}_\varphi$. Die von φ unabhängige Koordinate $A_\varphi(r, \theta)$ kann auf der x-z-Ebene ($\varphi = 0 : x = r \sin(\theta), y = 0, z = r \cos(\theta)$) berechnet werden.

Da dort gilt: $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_y \Rightarrow A_\varphi = A_y$, kann die kartesische Koordinate $A_y(\vec{r})$ berechnet werden. Sie ergibt sich direkt aus (5):

$$A_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{VS} \frac{j_y(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad \text{mit } \vec{r} = (x, 0, z) . \quad (13a)$$

$$j_y(\vec{r}') \text{ erhält man aus (6a): } \vec{j}(\vec{r}') = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_{\varphi'} = j \vec{e}_{\varphi'} ,$$

indem $\vec{e}_{\varphi'}$ in kartesischen Koordinaten dargestellt wird. Diese Darstellung hängt noch von den verwendeten Koordinaten für die Integration (s.u.) ab.

Wird über kartesische Koordinaten x', y', z' integriert, gilt:

$$\vec{e}_{\varphi'} = \left(-j \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, j \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, 0 \right) .$$

Wird über „Torus“-Koordinaten ρ', ϕ', ψ' (siehe Bild 6) integriert, gilt:

$$\vec{e}_{\varphi'} = (-j \sin(\phi'), j \cos(\phi'), 0) .$$

Der Azimut-Winkel heißt hier (aus „historischen“ Gründen) ϕ' ; er ist identisch mit der Kugel-Koordinate φ' . Der zugehörige Einheitsvektor ist identisch mit $\vec{e}_{\varphi'}$.

Damit ergibt sich:

$$j_y(\vec{r}') = j \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \text{bzw.} \quad j_y(\vec{r}') = j \cos(\phi') \quad (13b)$$

Das Integral in (13a) wird unter Verwendung von (13b) numerisch berechnet mit Hilfe des Mathematica-Befehls NIntegrate. Dabei werden die Möglichkeiten von „computational geometry“ in Mathematica genutzt. Die Code-Zeilen im nachfolgenden Text, erkennbar an der Schriftart, wurden direkt dem Programm entnommen und nur den Bezeichnungen im Text angepasst. int ... bezeichnet den jeweiligen Integranden.

Probeweise erfolgt die Berechnung von $A_y(\vec{r})$ an einzelnen ausgewählten Punkten auf der x-z-Ebene.

Zur Kontrolle wird die Integration durchgeführt sowohl in kartesischen Koordinaten als auch in solchen Koordinaten, die an die Geometrie des Integrationsgebietes (des Torus) angepasst sind („Torus“-Koordinaten, s. Bild 6). Der Integrand (13a) muss entsprechend formuliert werden.

α) Integration in kartesischen (dimensionsbehafteten) Koordinaten

Die Integrationsvariablen (-koordinaten) sind $\vec{r}' = (x', y', z') = (x_s, y_s, z_s)$.

Der Nenner des Integranden lautet $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + y'^2 + (z - z')^2}$.

Die y-Koordinate des Stromdichte-Vektors wird in diesen Integrationsvariablen

ausgedrückt: $j_y(\vec{r}') = j \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$, s. (13b).

Das Integrationsgebiet (Beschreibung des Torus in kartesischen Koordinaten) ist:

`torusK = ImplicitRegion[(-a + Sqrt[xs^2 + ys^2])^2 + zs^2 <= R^2, {xs, ys, zs}]`

Damit lautet der Befehl für die numerische Integration:

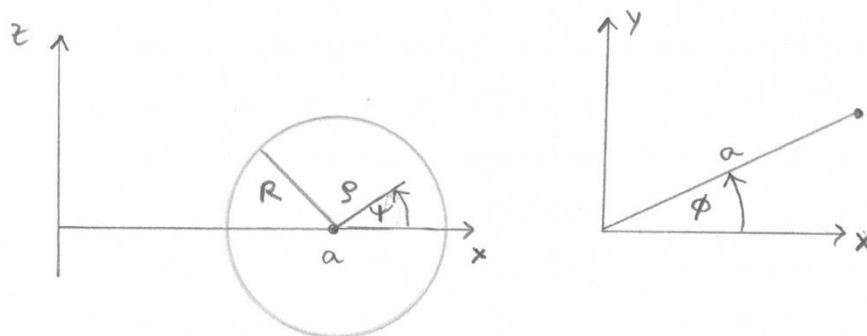
`NIntegrate[intK[x, 0, z, xs, ys, zs], {xs, ys, zs} ∈ torusK]`

β) Integration in (dimensionsbehafteten) Torus-Koordinaten

Die kartesischen Koordinaten werden durch die Torus-Koordinaten ρ, ϕ, ψ parametrisiert, s. Bild 6; der Azimut-Winkel ϕ ist identisch mit der azimuthalen Kugel-Koordinate φ :

$$r_{eff} = a + \rho \cos(\psi), \quad x = r_{eff} \cos(\phi), \quad y = r_{eff} \sin(\phi), \quad z = \rho \sin(\psi) \quad . \quad (14) .$$

Bild 6: Torus-Koordinaten



Ein notwendiger, aber nicht hinreichender **Test der Parametrisierung** ist die Berechnung des Torus-Volumens.

Die Integrationsvariablen sind die Torus-Koordinaten ρ', ϕ', ψ' ($= \rho_s, \phi_s, \psi_s$).

Der Nenner des Integranden lautet $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + y'^2 + (z - z')^2}$.

Die kartesischen Koordinaten x', y', z' müssen gem. (14) parametrisiert werden.

Bei der Umrechnung des (differentiellen) Volumenelements d^3r' ist die Jacobi-Determinante J' zu beachten:

$$d^3r' = dx'dy'dz' = J' d\rho' d\phi' d\psi', \quad J' = (a + \rho' \cos(\psi')) \rho'. \quad (15)$$

Die Jacobi-Determinante ist offensichtlich unabhängig vom Azimut-Winkel ϕ' .

Sie ist im Integranden `intT` enthalten.

Die y-Koordinate des Stromdichte-Vektors wird in den Integrationsvariablen ausgedrückt: $j_y(\vec{r}') = j \cos(\phi')$, s. (13b).

Das Integrationsgebiet (Beschreibung des Torus in Torus-Koordinaten) ist:

`torusTs = ParametricRegion[{phi_s, psi_s, rho_s}, {{phi_s, 0, 2pi}, {psi_s, 0, 2pi}, {rho_s, 0, R}}].`

Damit lautet der Befehl für die numerische Integration:

`NIntegrate[intT[x, 0, z, rho_s, psi_s, phi_s], {phi_s, psi_s, rho_s} ∈ torusTs]`

Bemerkung 5:

Die obige Ausführung zur Berechnung des Vektorpotentials soll näher erläutert werden.

Die Rotations-Symmetrie des Problems überträgt sich auf das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$:

Sei $\vec{r} = (r, \varphi, \theta)$ und $\vec{r} = (r, \tilde{\varphi}, \theta)$, dann ist $|\vec{A}(\vec{r})| = |\vec{A}(\tilde{\vec{r}})| = |\vec{A}(r, \theta)|$, also

unabhängig von der azimutalen Winkel-Koordinate. Praktischerweise bestimmt man $|\vec{A}(r, \theta)|$ auf der x-z-Ebene.

Jetzt muss noch die Richtung von $\vec{A}(\vec{r})$ bestimmt werden: Das durch (5) gegebene Vektorpotential kann unmittelbar in seine kartesischen Komponenten zerlegt werden

(vergl. Bem. 3). Man kann zeigen, dass auf der x-z-Ebene gilt: $A_x \equiv 0$, $A_z \equiv 0$

(letzteres ist trivial wegen $j_z \equiv 0$). Es verbleibt also nur die \vec{e}_y -Komponente,

welche auf der x-z-Ebene der \vec{e}_φ -Komponente entspricht. Wegen der Rotations-

Symmetrie gilt dann für alle \vec{r} : $\vec{A}(\vec{r}) = A_\varphi(r, \theta)\vec{e}_\varphi$. Das Vektorpotential ist also in

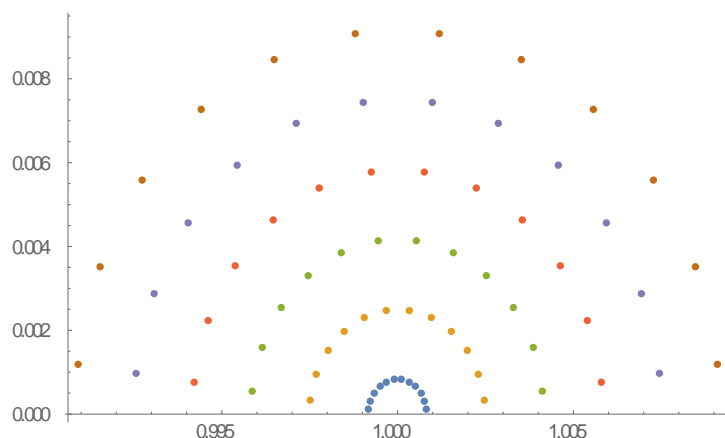
jedem Punkt kollinear mit dem Stromdichte-Vektor (das Vorzeichen von A_φ wurde nicht global untersucht). Für den Betrag gilt: $|\vec{A}(r, \theta)| = |A_\varphi(r, \theta)| = |A_y(x, y = 0, z)|$ mit $x = r \sin(\theta)$, $z = r \cos(\theta)$.

Als Alternative zur Zerlegung in kartesische Komponenten kann man aus (5) auch direkt die Kugel-Koordinaten von $\vec{A}(\vec{r})$ gewinnen. Dazu wird auf beiden Seiten von (5) nacheinander das Skalarprodukt mit den Einheitsvektoren \vec{e}_r , \vec{e}_φ , \vec{e}_θ gebildet. Auf der linken Seite steht dann die jeweilige Kugel-Koordinate von $\vec{A}(\vec{r})$, z.B. $A_\varphi(\vec{r})$; rechts steht das jeweilige Skalarprodukt im Integral, z.B. $\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{e}_\varphi = j \vec{e}_{\varphi'} \cdot \vec{e}_\varphi$ (gestrichene und ungestrichene Koordinaten beachten!). Die Auswertung erfolgt wieder für \vec{r} auf der x-z-Ebene: Man kann zeigen, dass dort nur $A_\varphi(\vec{r}) \neq 0$. Wegen der Rotations-Symmetrie gilt dann wieder für alle \vec{r} : $\vec{A}(\vec{r}) = A_\varphi(r, \theta) \vec{e}_\varphi$.

4.1.2 Durchführung der Volumen-Integration (2)

Ziel ist die Durchführung der Integration: $W = \frac{1}{2} \int_{V_S} \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{A}(\vec{r}) d^3r$. Dazu wird das Vektorpotential bereitgestellt durch die Berechnung seiner y-Koordinate $A_y(\vec{r})$ (s. (13a)) an systematisch bestimmten Punkten auf dem Torus-Querschnitt in der x-z-Ebene: $\vec{r}_i = (x_i, 0, z_i)$. Wegen der Spiegel-Symmetrie müssen nur Punkte mit $z > 0$ berücksichtigt werden. Die kartesischen Koordinaten x_i, z_i werden gem. (14a) berechnet, mit systematisch vorgegebenen Werten für die Parameter ϱ_i und ψ_i (mit $\phi_i = 0$), s. Bild 7.

Bild 7: typische Anordnung von Stützstellen ($a = 1$, $R = 1/100$)



Da $\vec{A}(\vec{r})$ nur an endlich vielen Stellen des Torus-Querschnitts bekannt ist, kann die Volumen-Integration nicht über NIntegrate erfolgen. Dieser Befehl benötigt eine auf dem ganzen Querschnitt definierte Funktion. Diese ließe sich u.U. gewinnen durch eine geeignete Interpolation oder einen Fit. **Diese Möglichkeit wurde nicht weiter verfolgt.**

Die Integration wird daher als Riemann'sche Summe angenähert, wobei die Punkte \vec{r}_i als „Stützstellen“ dienen:

$$W = \frac{1}{2} \int_{VS} \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) d^3r \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \vec{j}(\vec{r}_i) \cdot \vec{A}(\vec{r}_i) \Delta V_i \quad ; \quad (16a)$$

So wie das Volumen-Integral bei der konkreten Durchführung zum Dreifach-Integral wird, ist die Summe eine Dreifach-Summe. Der Index i steht für ein Tripel (k, l, m) . Das Volumenelement $\Delta V_i = (a + \rho_k \cos(\psi_m)) \rho_k \Delta \rho_k \Delta \phi_l \Delta \psi_m$ kann geometrisch hergeleitet oder direkt aus (15) übertragen werden. Bei äquidistanter Unterteilung der Intervalle für ρ, ϕ, ψ (s. Bild 7) wird daraus $\Delta V_i = (a + \rho_k \cos(\psi_m)) \rho_k \Delta \rho \Delta \phi \Delta \psi$. Da die Summanden $\vec{j}(\vec{r}_i) \cdot \vec{A}(\vec{r}_i) \Delta V_i$ dann nicht mehr von ϕ_l abhängen, kann die entsprechende Summation trivial ausgeführt werden: $\sum \Delta \phi_l = 2\pi$. Damit wird

$$W \approx \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^v \vec{j}(\vec{r}_\mu) \cdot \vec{A}(\vec{r}_\mu) \Delta V_\mu \quad ; \quad (16b)$$

der Index μ steht für ein Paar (k, m) und $\Delta V_\mu = 2\pi (a + \rho_k \cos(\psi_m)) \rho_k \Delta \rho \Delta \psi$ ist ein Torus-ähnliches Volumenelement.

Ein erster **Test** ist wieder die (approximative) Berechnung des Torus-Volumens.

Die Berechnungen wurden in dimensionslosen Koordinaten ausgeführt, d.h. alle Längen wurden mit dem mittleren Radius a skaliert. So ergibt sich insbesondere der dimensionslose Parameter $\lambda = R/a$, R ist der Querschnitts-Radius. **Die Ergebnisse für verschiedene Werte von λ werden in Kap. 5 vorgestellt.**

Um die **numerische Stabilität des Ergebnisses zu überprüfen**, wurde die Rechnung für $\lambda = 1/100$ mit **höherer Genauigkeit**, d.h. mit einer vergrößerten Anzahl von Stützstellen und einer höheren internen Genauigkeit (WorkingPrecision) bei der numerischen Integration, wiederholt. Die Veränderung des so ermittelten Wertes für die Selbstinduktivität beträgt ca. 0.2% gegenüber dem „ungenauen“ Wert. **Eine systematische Untersuchung steht noch aus.**

Zur Verbesserung der numerischen Genauigkeit könnte man bei der Integration auch eine kleine Kugel K_ε aussparen (vergl. Bem. 2) und die Abhängigkeit des Ergebnisses von ε untersuchen. Dies wurde noch nicht durchgeführt.

Zur Kontrolle wurde auch die \vec{e}_x -Koordinate aus (5) numerisch an den ausgewählten Punkten \vec{r}_i berechnet, zunächst für $a = 1$, $R = 1/100$. Das Ergebnis hängt davon ab, in welchen Koordinaten die Integration durchgeführt wird. Bei Verwendung von kartesischen Integrations-Koordinaten ist $A_x(\vec{r}_i)$ Null im Rahmen der Maschinengenauigkeit (16 Stellen). Erhöht man die Genauigkeitsanforderung auf 20 Stellen, ist das Ergebnis durchweg 10^{-24} , also Null. Bei Verwendung von Torus-Koordinaten (und einer Genauigkeitsanforderung von 20 Stellen) ist $A_x(\vec{r}_i)$ nicht identisch Null, aber mindestens um den Faktor 10^{-6} kleiner als $A_y(\vec{r}_i)$, oft auch um 10^{-18} .

Es ist bemerkenswert, dass die der Torus-Geometrie angepassten Koordinaten ein ungenaueres Ergebnis liefern (dafür allerdings in kürzerer Rechenzeit). Für $a = 1$, $R = 1/10$ ergibt sich im Rahmen der Maschinengenauigkeit ein ähnliches Bild.

4.2 Weg 2

Relevante Formeln:

$$W =: \frac{1}{2} L I^2 . \quad (1)$$

$$W = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_{VS} \int_{VS} \vec{j}(\vec{r}) \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' d^3r \quad (3)$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_n =: j \vec{e}_n \quad \text{im Torus, } \vec{j}(\vec{r}) = 0 \quad \text{außerhalb.} \quad (6)$$

4.2.1 Numerische Berechnung

Die numerische Berechnung des Sechsfach-Integrals war nicht möglich, s. dazu aber die Bemerkung am Anfang von Kap.4. Mathematica bringt die nachstehenden Warnungen auch bei einer erhöhten Genauigkeitsanforderung (`WorkingPrecision` \rightarrow 20):

```
NIntegrate[intTT[ρ, ψ, φ, ρs, ψs, φs], {φ, ψ, ρ} ∈ torusT,
           {φs, ψs, ρs} ∈ torusTs, WorkingPrecision → 20]
```

`NIntegrate::slwcon`: Numerical integration converging too slowly; suspect one of the following: singularity, value of the integration is 0, highly oscillatory integrand, or `WorkingPrecision` too small.

NIntegrate::ncvb: NIntegrate failed to converge to prescribed accuracy after 54 recursive bisections in $\rho \dots$.

Trotz solcher Warnungen wird manchmal das richtige Ergebnis erzielt, aber hier stimmt das Ergebnis nicht mit dem aus 4.1.2 überein. Letzteres ist verlässlich, da es für $R \ll a$ übereinstimmt mit der korrigierten Näherungsformel aus [EII], s. 4.2.2 und Kap. 5.

4.2.2 Approximative analytische Berechnung

In [EII, p.311] wird eine Auswertung von (3) präsentiert, die lediglich mit der Näherung $R \ll a$ auskommt (es werden Terme bis zur Ordnung λ^2 berücksichtigt), in Verbindung mit den „üblichen“ Näherungen für die elliptischen Integrale (s. a. [Leo, S.203]). Insbesondere erfolgt in (3) und bei [EII] keine Aufteilung in eine äußere und eine innere Induktivität. [EII, p. 311] ergibt

$$L = \mu_0 a \left(\ln \left(8 \frac{a}{R} \right) - 1.5 \right). \quad (17)$$

Die Auswertung wurde sorgfältig nachvollzogen und konnte an einer Stelle (der Integration bezüglich ϱ, ϱ') verbessert werden durch Beachtung von $\sqrt{(\varrho - \varrho')^2} = |\varrho - \varrho'|$ (in [EII] fehlen die Betragstriche). Mit dieser **Korrektur** ergibt sich als Näherungsformel für die Selbstinduktivität:

$$L = \mu_0 a \left(\ln \left(8 \frac{a}{R} \right) - 1.75 \right). \quad (18)$$

Es ist auffällig, dass die Korrektur (i.e. $\mu_0 a 0.25$) dem Betrage nach gerade der inneren Induktivität entspricht, wie sie in [Bro] und [Leo] angegeben wird. Allerdings wird sie hier vom ursprünglichen Ergebnis (17) subtrahiert. **Eine Erklärung hierfür kann nicht gegeben werden.** Mit der Korrektur stimmt die Näherungsformel aus [EII] mit den Angaben in [Bro], [Den], [Jak], [Leo], [Stö] überein. Auch [JaK, S.272] gibt eine Anleitung zur Herleitung der Formel, die aber mehr (und „mutigere“) Annahmen macht als [EII]. [Den, p.4, ex. „Circular Loop“] zeigt eine Berechnung, die ohne elliptische Integrale auskommt: „This expression also may be found in the literature, derived with the help of elliptic functions and some approximations in a much more complicated way.“ Zur Herleitung der Formel in [Leo] siehe Kap. 4.4 .

4.3 Weg 3

Relevante Formeln:

$$W =: \frac{1}{2} L I^2 \quad (1)$$

$$W = \frac{1}{2} \mu_0^{-1} \int_V \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) d^3r \quad (4)$$

Das Magnetfeld muss im Prinzip an vielen Punkten im ganzen Raum berechnet werden, um das Integral in (4) als Riemann'sche Summe approximieren zu können. Praktisch muss man sich auf ein Teilgebiet beschränken, das immerhin so groß ist, dass außerhalb die Beiträge zum Integral vernachlässigbar sind. **Weg 3 wurde bisher nicht weiter verfolgt.**

4.4 Weg 4

Relevante Formel:

$$\Phi_m = \oint_{\partial F} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (8b)$$

$$L_{ext} = \frac{\Phi_K}{I}, \quad \Phi_K = \iint_K \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = \oint_{\partial K} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (10)$$

$$W_{int} = \frac{1}{2} \mu_0^{-1} \int_{VS} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) d^3r = \frac{1}{2} L_{int} I^2 \quad (11)$$

Die Ergebnisse für verschiedene Werte von λ werden in Kap. 5 vorgestellt.

4.4.1 Die äußere Induktivität

Die Auswertung des Kurvenintegrals in (10) ist sehr einfach, da das Vektorpotential rotations-symmetrisch ist und damit auf dem Kreis ∂K den konstanten Betrag

$$A_{\partial K} := A(\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{R}, \theta = \pi/2) \text{ hat. Also gilt: } \oint_{\partial K} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = A_{\partial K} * 2\pi * (\mathbf{a} - \mathbf{R}) .$$

Für die äußere Induktivität ergibt sich somit:

$$L_{ext} = A_{\partial K} * \frac{2\pi(a-R)}{I} . \quad (19)$$

[Leo, S.203] wertet diese Formel aus, indem er das Vektorpotential für einen querschnittslosen Ring (!) einsetzt, vergl. [JaK, S.211]. Die auftretenden elliptischen Integrale werden „wie üblich“ genähert und man erhält

$$L_{ext} = \mu_0 a \left(\ln \left(8 \frac{a}{R} \right) - 2 \right) . \quad (20)$$

4.4.2 Die innere Induktivität

Für die Berechnung der inneren Induktivität über (11) muss das magnetische Feld innerhalb des Leiters berechnet werden.

a) Das Magnetfeld als Rotation des Vektorpotentials: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

Statt einer numerischen Differentiation des Vektorpotentials soll dieses als kontinuierliche Funktion auf dem Querschnitt bereitgestellt werden. Dies geschieht über eine **Interpolation oder einen least-square-fit** der in Kap. 4.1.2 ermittelten Wertepaare $(\vec{r}_i, \vec{A}(\vec{r}_i))$ und die anschließende Ausführung der Rotation in den Koordinaten, in denen $\vec{A}(\vec{r})$ bereitgestellt wird. **Die bisher gewonnenen Ergebnisse müssen noch einer gründlichen Überprüfung unterzogen werden.**

b) Das Magnetfeld durch Integration nach Biot-Savart: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{VS} \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$

Man kann zeigen, dass trotz der Singularität von $\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ eine Integration möglich ist (vergl. Bem. 2). Numerisch konnte die Integration nicht durchgeführt werden (s. dazu aber die Bemerkung am Anfang von Kap.4). Auch hier gilt die Aussage aus Kap. 4.1.2: man könnte bei der numerischen Integration die kleine Kugel K_ϵ aussparen und so ggf. zu einem Ergebnis kommen.

c) Bis zur Klärung dieser Fragen wird hilfsweise angenommen, dass

$$L_{int} = \mu_0 a 0.25, \quad (21)$$

s. [Bro, Induktion], [Leo, S. 205]; die relative Permeabilität des Leiters soll 1 sein.

[Leo, S. 204] leitet (21) auch her. Es wird die „längenbezogene innere Induktivität“ L'_{int} eines (unendlich langen) geraden Leiters (!) benutzt: $L'_{int} = \frac{\mu_0}{(8\pi)}$. Diese wird mit dem mittleren Torus-Umfang $2\pi a$ multipliziert. Es ist bemerkenswert, dass in (21) der Querschnitts-Radius R nicht auftritt.

4.4.3 Berechnung der Gesamt-Induktivität durch geeignete Wahl des Integrationsweges

a)

Die Berechnung des Flusses durch diejenige Kreisfläche, welche durch die neutrale Faser begrenzt wird, steht noch aus.

b)

Nur der Vollständigkeit halber wurde die Berechnung des Flusses durch diejenige Kreisfläche, welche durch den Kreis mit Radius a (= mittlerer Torus-Radius, mTR) begrenzt wird, durchgeführt. Allerdings wird dieser geometrisch ausgezeichneten Linie wohl keine physikalische Bedeutung zukommen. Das Kurvenintegral (8b) ergibt auf dem Kreis mit Radius a :

$$L_{mTR} := A_{mTR} * \frac{2\pi a}{l} , \quad A_{mTR} := A(\mathbf{r} = \mathbf{a}, \theta = \pi/2) . \quad (22)$$

5. Ergebnisse

5.1 Tabellarische Übersicht

Wie in Kap. 4 ausgeführt wird die Selbstinduktivität L auf verschiedenen Wegen berechnet. Dargestellt wird hier die „normierte“ Selbstinduktivität $\tilde{L} = \frac{L(\lambda)}{\mu_0 a}$.

Tabelle 1: Die normierte Selbstinduktivität \tilde{L} als Funktion von λ

Legende:

$\tilde{L}(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\mu_0 a}$, \tilde{L} und $\lambda = R/a$ sind dimensionslos. \tilde{L} ist auf 3 Stellen gerundet.

$\tilde{L}1$: \tilde{L} **numerisch** berechnet nach Weg 1, s. 4.1.

$\tilde{L}2 = \ln\left(8\frac{1}{\lambda}\right) - 1.75$, approximativ **analytisch** nach Weg 2, s. 4.2.2.

$\tilde{L}4$: $\tilde{L} = (\tilde{L}_{ext} + 0.25)$ numerisch berechnet nach Weg 4, s. 4.4.1 und 4.4.2 c.

$\tilde{L}m$: $\tilde{L} = L_{mTR} / (\mu_0 a)$ numerisch berechnet nach 4.4.3 b.

λ	$\tilde{L}1$	$\tilde{L}2$	$\tilde{L}4$	$\tilde{L}m$
1	0.639	0.329	0.250	0.759
0.9	0.699	0.435	0.264	0.835
0.8	0.773	0.552	0.308	0.926
0.7	0.886	0.686	0.386	1.03
0.6	0.983	0.840	0.505	1.17
0.5	1.13	1.02	0.669	1.33
0.4	1.32	1.25	0.896	1.53
0.3	1.59	1.53	1.21	1.81
0.2	1.97	1.94	1.67	2.20
0.1	2.65	2.63	2.46	2.89
0.08	2.87	2.86	2.71	3.11
0.06	3.16	3.14	3.02	3.39
0.04	3.56	3.55	3.46	3.80
0.02	4.23	4.24	4.19	4.49
0.01	4.95	4.93	4.91	5.18
0.001	7.25	7.23	7.23	7.49

Bemerkung 6:

a)

$\tilde{L}2$ und $\tilde{L}1$ nähern sich für kleine Werte von λ wie zu erwarten an, s. a. Tabelle 2 und Bild 8: die Berechnung von $\tilde{L}2$ benutzt Annahmen, die für kleinere Werte von λ immer besser erfüllt sind. Für $\lambda < 0.1$ stimmen $\tilde{L}2$ und $\tilde{L}1$ praktisch überein. Dies kann auch als Absicherung des numerischen Ergebnisses $\tilde{L}1$ gewertet werden.

Tabelle 2: Liste der Wertepaare $\{ \lambda, \delta L(\lambda) \}$

Legende:

$\delta L(\lambda)$ ist die Differenz zwischen der numerisch berechneten (normierten) Selbstinduktivität $\tilde{L}1$ und dem analytisch-approximativ ermittelten Wert $\tilde{L}2$. Die Werte sind direkt dem Programm entnommen. Die graphische Darstellung ist Bild 9.

{{1, 0.309558}, {0.9, 0.264198}, {0.8, 0.220415}, {0.7, 0.179884}, {0.6, 0.142733}, {0.5, 0.107411},
 {0.4, 0.0742677}, {0.3, 0.0565857}, {0.2, 0.0311205},
 {0.1, 0.0179734}, {0.08, 0.0148298}, {0.06, 0.0171477}, {0.04, 0.0116826},
 {0.02, -0.0114645}, {0.01, 0.0153883}, {0.001, 0.0128032}}

b)

$\tilde{L}4$ unterscheidet sich für größere Werte von λ deutlich von $\tilde{L}1$. Dies wird daran liegen, dass in diesen Fällen der Beitrag der inneren Induktivität durch (21) unterschätzt wird, was die bei der Herleitung verwendete Näherung auch nahe legt.

Eine Klärung sollte die Berechnung nach Kap. 4.4.2 a bringen.

c)

$\tilde{L}m$ unterscheidet sich ebenfalls deutlich von $\tilde{L}1$ (und $\tilde{L}2$), aber auch von $\tilde{L}4$. Die Berechnung der Selbstinduktivität nach Kap. 4.4.3 b kann daher erwartungsgemäß verworfen werden.

Bei den folgenden Bildern ist zu beachten, dass die horizontale λ -Achse bei 0.001 beginnt!

Bild 8: $\tilde{L}1$ (blau) und $\tilde{L}2$ (rot) als (diskrete bzw. kontinuierliche) Funktionen von λ

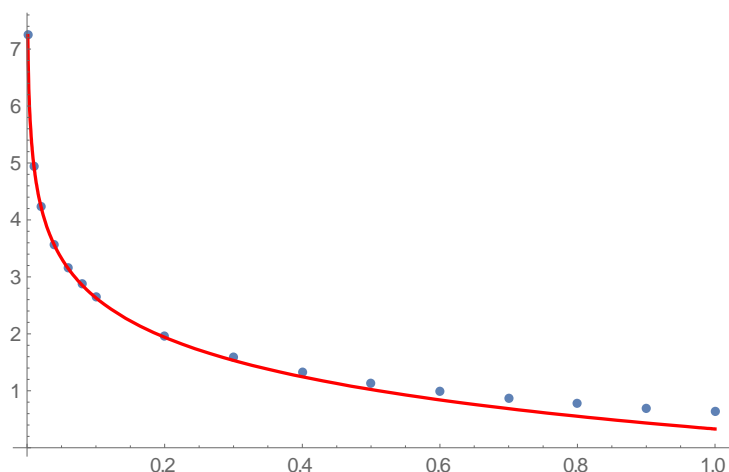
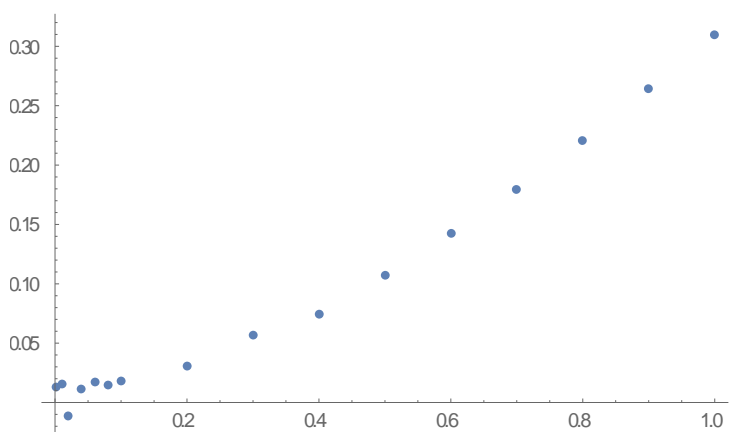


Bild 9: $\delta L(\lambda)$ als Funktion von λ



Bemerkung 7:

Der „Ausreißer“ für $\lambda = 0.02$ kann nicht erklärt werden. Die relative Abweichung liegt allerdings im Promille-Bereich, s. Tabelle 3. **Zur Kontrolle sollen weitere Punkte in der Nähe von $\lambda = 0.02$ berechnet werden.**

Tabelle 3: Die relative Abweichung, bezogen auf $\tilde{L}2$, also die Paare $\{\lambda, \delta L(\lambda)/\tilde{L}2\}$

$\{\{1, 0.0427733\}, \{0.9, 0.0365056\}, \{0.8, 0.0304558\}, \{0.7, 0.0248554\}, \{0.6, 0.0197221\}, \{0.5, 0.0148416\},$
 $\{0.4, 0.0102619\}, \{0.3, 0.00781873\}, \{0.2, 0.00430008\}, \{0.1, 0.00248347\}, \{0.08, 0.00204911\},$
 $\{0.06, 0.00236939\}, \{0.04, 0.00161425\}, \{0.02, -0.00158411\}, \{0.01, 0.00212628\}, \{0.001, 0.00176908\}\}$

5.2 Lineare Regression

Um die Differenz $\delta L(\lambda)$ zwischen der numerisch berechneten normierten Selbstinduktivität $\tilde{L}1$ und dem analytisch-approximativ ermittelten Wert $\tilde{L}2$ als kontinuierliche Funktion von λ darzustellen, wurde mit Mathematica eine lineare Regression für verschiedene Modellfunktionen durchgeführt. Die einfachste Modellfunktion ist die lineare Funktion: $\delta L(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda$. Die unbekanntenen Koeffizienten a_i der Modellfunktion werden durch die Methode der kleinsten Quadrate (engl.: least square fit) bestimmt. Das Ergebnis ist die Regressionsfunktion („Fit-Funktion“) $\delta L_{Fit}(\lambda)$, deren nunmehr bekannte Koeffizienten \tilde{a}_i auch Regressionskoeffizienten heißen (s. z.B. [Ble, S.151]). Der einfachste Befehl zur Durchführung der linearen Regression lautet `Fit`.

Im Folgenden wird das Ergebnis der linearen Regression, also $\delta L_{Fit}(\lambda)$, für die jeweilige Modellfunktion gezeigt (Bilder 10.1, 10.2, 10.2a). Alle Angaben wurden dem Programm unverändert entnommen; die Regressionskoeffizienten sollten noch auf drei Nachkommastellen (= Anzahl der mitgegebenen Stellen von $\tilde{L}1(\lambda_i)$) gerundet werden.

Als Güte-Merkmal für den Fit, also als Maß für die Streuung der Ausgangspunkte $(\lambda_i, \delta L(\lambda_i))$ um die Ausgleichskurve, dient die **Varianz der Residuen** VarRes :

$$\text{VarRes} = \text{SQR} / (n-p), \quad p \text{ ist die Zahl der Parameter in der Modellfunktion.} \quad (23)$$

SQR ist die Summe der quadrierten Abweichungen („Residuen“):

$$\text{SQR} = \sum_{i=1}^n (\delta L(\lambda_i) - \delta L_{Fit}(\lambda_i))^2; \quad (24)$$

n ist die Anzahl der Wertepaare $\{\lambda_i, \delta L(\lambda_i)\}$, hier $n = 16$. Die Wertepaare stehen in Tabelle 2.

Die Wurzel aus VarRes heißt Standardabweichung der Residuen ([Ble, S.151]).

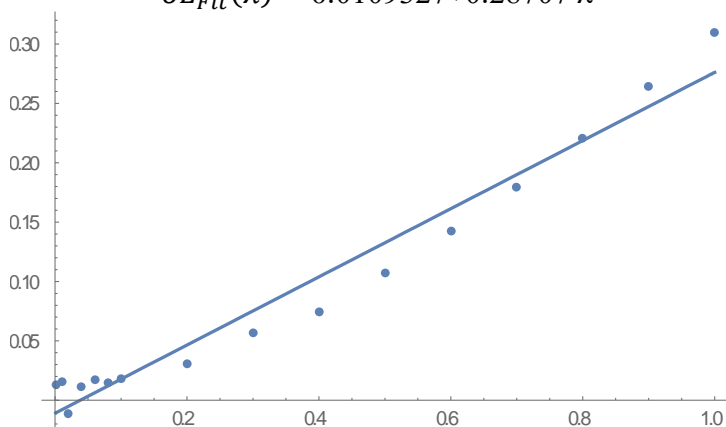
Mit dem Mathematica-Befehl `LinearModelFit` können zusätzlich statistische Daten abgefragt werden, insbesondere die Konfidenzintervalle für die Regressionskoeffizienten ([Ble, S.151]).

Die folgenden Bilder zeigen $\delta L_{Fit}(\lambda)$ als Funktion von λ .

Die horizontale λ -Achse beginnt bei 0.001!

Bild 10.1: Modellfunktion 1: Lineare Funktion; p=2; Graph: Ausgleichsgerade

$$\delta L_{Fit}(\lambda) = -0.0109327 + 0.28707 \lambda$$

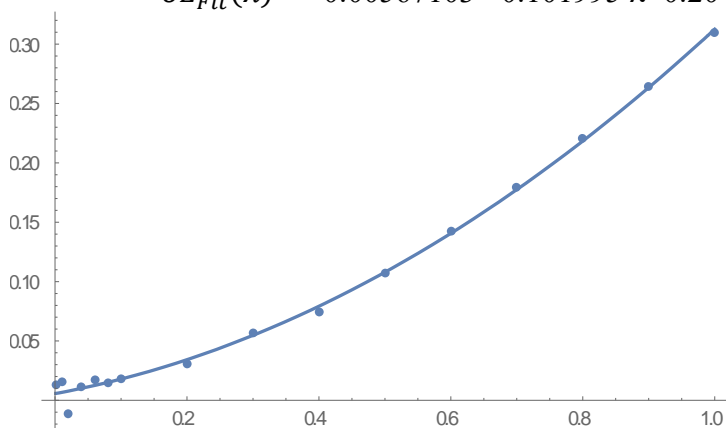


$$\text{SQR} = 0.00533191$$

$$\text{VarRes1} = \text{SQR} / (n-2) = 0.000380851$$

Bild 10.2: Modellfunktion 2: Polynom 2. Grades; p=3

$$\delta L_{Fit}(\lambda) = 0.00567103 + 0.101995 \lambda + 0.204889 \lambda^2$$

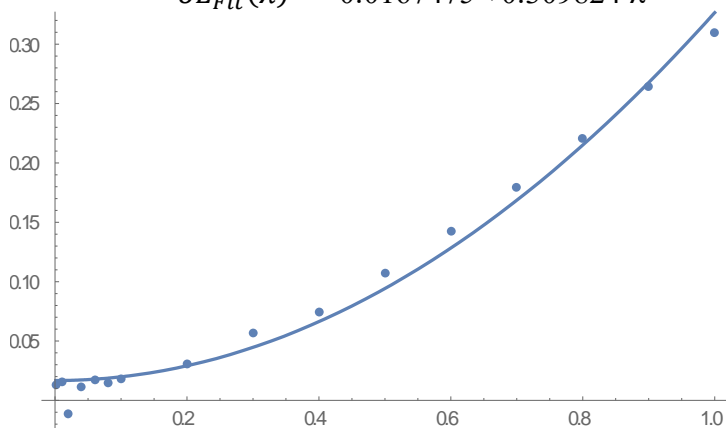


$$\text{SQR} = 0.000581983$$

$$\text{VarRes2} = \text{SQR} / (n-3) = 0.0000447679$$

Bild 10.2a: Modellfunktion 2a : Polynom 2. Grades nur mit graden Potenzen; p=2

$$\delta L_{Fit}(\lambda) = 0.0167475 + 0.309824 \lambda^2$$



$$\text{SQR} = 0.00192266$$

$$\text{VarRes2a} = \text{SQR} / (n-2) = 0.000137333$$

Ergebnisse für weitere Modellfunktionen:

Modellfunktion 3: Polynom 3. Grades; p=4

$$\delta L_{Fit}(\lambda) = 0.00719007 + 0.0674247 \lambda + 0.301697 \lambda^2 - 0.0663476 \lambda^3$$

$$SQR = 0.000550872$$

$$\text{VarRes3} = SQR / (n-4) = 0.000045906$$

Modellfunktion 4: Polynom 4. Grades; p=5

$$\delta L_{Fit}(\lambda) = 0.00674893 + 0.0828044 \lambda + 0.222504 \lambda^2 + 0.0627842 \lambda^3 - 0.065388 \lambda^4$$

$$SQR = 0.000548815$$

$$\text{VarRes4} = SQR / (n-5) = 0.0000498923$$

Modellfunktion 4a: Polynom 4. Grades, aber nur gerade Potenzen; p=3

$$\delta L_{Fit}(\lambda) = 0.01177 + 0.398842 \lambda^2 - 0.104271 \lambda^4$$

$$SQR = 0.000734855$$

$$\text{VarRes4a} = SQR / (n-3) = 0.0000565273$$

Die Varianzen für die Fit-Funktionen (der Modelle) 2, 3 und 4 liegen eng beieinander. Sofern keine theoretischen Gründe dagegen sprechen, sollte man die einfachste Funktion wählen, also die quadratische Fit-Funktion

$\delta L_{Fit}(\lambda) = 0.00567103 + 0.101995 \lambda + 0.204889 \lambda^2$, zumal die höheren Potenzen von λ in dem hier relevanten Bereich $0 < \lambda \leq 1$ nur eine untergeordnete Rolle spielen.

Für diese quadratische Fit-Funktion $\delta L_{Fit}(\lambda) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \lambda + \tilde{a}_2 \lambda^2$ wurden die Konfidenzintervalle für die Regressionskoeffizienten ermittelt, und zwar für die Sicherheitswahrscheinlichkeiten **67%** und **95%**; Werte ist die Liste der Wertepaare in Tabelle 2:

```
lm = LinearModelFit[werte, {1, λ, λ2}, λ]
```

```
lm["ParameterConfidenceIntervals", ConfidenceLevel->.67]
```

```
{{0.00271639, 0.00862566}, {0.0831334, 0.120857}, {0.184759, 0.225019}}
```

```
lm["ParameterConfidenceIntervals", ConfidenceLevel->.95]
```

```
{{-0.000636337, 0.0119784}, {0.0617301, 0.14226}, {0.161917, 0.247861}}
```

Das heißt, „dass mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 67% (95%) der unbekannte Parameter a_0 der (unbekannten) Regressionsfunktion der Grundgesamtheit zwischen“ ([Ble, S.152]) 0.00271639 und 0.00862566 (- 0.000636337 und 0.0119784) liegt. Analoges gilt für a_1, a_2 . **Unberücksichtigt bleiben die Unsicherheiten aufgrund der numerischen Ungenauigkeiten.**

5.3 Zusammenfassung: Die verbesserte Näherung für die Selbstinduktivität

a)

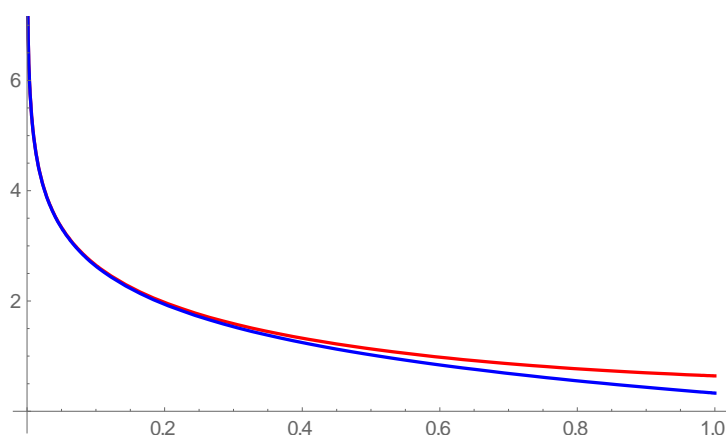
Die Selbstinduktivität L des ringförmigen Leiters (mittlerer Radius a , Querschnitts-Radius R , $\lambda = R/a$, $0 < R \leq a$) wird beschrieben durch

$$L(\lambda) \approx \mu_0 a \left(\ln \left(8 \frac{1}{\lambda} \right) - 1.75 + \delta L_{Fit}(\lambda) \right) ,$$

$$\delta L_{Fit}(\lambda) \approx (0.006 \pm 0.003) + (0.102 \pm 0.02) \lambda + (0.205 \pm 0.02) \lambda^2 . \quad (25)$$

Bild 11: $\frac{L(\lambda)}{\mu_0 a}$ und $\ln \left(8 \frac{1}{\lambda} \right) - 1.75$ als Funktionen von λ ;

horizontale Achse: $0.001 \leq \lambda \leq 1$; alle Größen sind dimensionslos

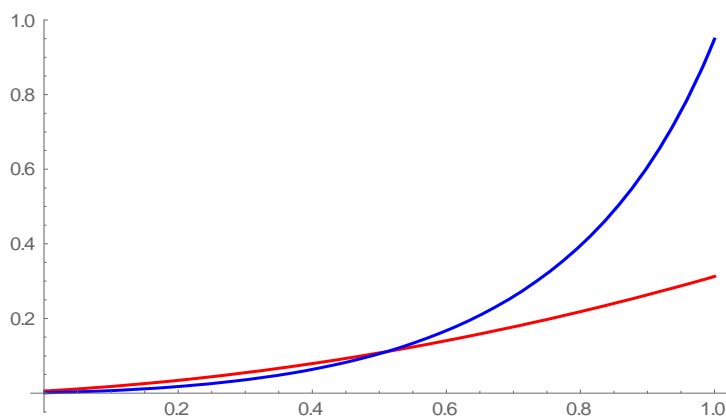


b)

$\delta L_{Fit}(\lambda)$ ist die Erweiterung („Differenz“) gegenüber der in der Literatur am häufigsten genannten Näherungsformel, i.e. $\ln \left(8 \frac{1}{\lambda} \right) - 1.75$ (s. Kap.3), und wird in Bild 12 gezeigt, zusammen mit der relativen Differenz $\delta L_{Fit}(\lambda) / (\ln \left(8 \frac{1}{\lambda} \right) - 1.75)$.

Bild 12: $\delta L_{Fit}(\lambda)$ und $\delta L_{Fit}(\lambda) / (\ln \left(8 \frac{1}{\lambda} \right) - 1.75)$ als Funktionen von λ ;

horizontale Achse: $0.001 \leq \lambda \leq 1$; alle Größen sind dimensionslos

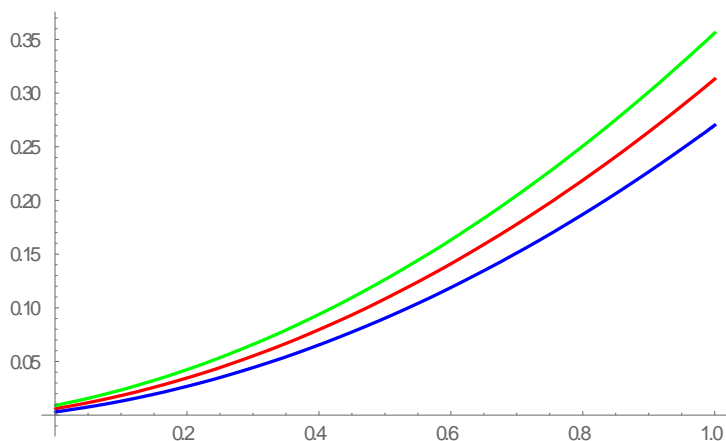


Die für die Koeffizienten in (25) angegebenen Unsicherheiten bilden die jeweiligen Konfidenz-Intervalle für das Vertrauensniveau („ConfidenceLevel“) von 0.67 ab.

Bild 13 zeigt den daraus resultierenden Konfidenz-Bereich für $\delta L_{Fit}(\lambda)$.

Bild 13: Konfidenz-Bereich für $\delta L_{Fit}(\lambda)$ als Funktion von λ ;

horizontale Achse: $0.001 \leq \lambda \leq 1$; alle Größen sind dimensionslos



c)

Der **zweite** Summand in $(\ln(8\frac{1}{\lambda}) - 1.75)$ konnte durch eine Korrektur der analytisch-approximativen Berechnung in [EII] bestimmt werden.

d)

Formel (25) gilt auch für „dicke“ Drähte ($R \approx a$), falls der Skin-Effekt keine Rolle spielt. Bei Gleichstrom ist dies stets der Fall, sonst muss R klein genug sein. Bei gegebener Eindringtiefe hängt die Funktion δL dann nicht mehr von $\lambda = R/a$ ab, sondern R und a sind die unabhängige Variablen.

e)

Alle numerischen Berechnungen wurden mit dem Computeralgebra-System Mathematica © durchgeführt.

Danksagung

Für hilfreiche Diskussionen und kritische Anmerkungen zur ersten Fassung des Berichtes (vom 13.1.2019) möchte ich mich bedanken bei Prof. Dr. M. Hannemann (FRA UAS), Dipl.-Phys. K. Horn, Prof. Dr. E. Jacobson (FRA UAS), Prof. Dr. R. Pitka (FRA UAS) und Prof. Dr. M. Wagner (Goethe-Universität Frankfurt).

Herrn Dipl.-Math. J.-L. Landvogt (ADDITIVE Soft- und Hardware für Technik und Wissenschaft GmbH) danke ich für die hilfreiche Unterstützung bei Problemen mit Mathematica.

Literatur

- [Alo] M. Alonso, E. J. Finn, Fundamental University Physics, Vol.2, Addison-Wesley (1967)
- [Ble] J. Bleymüller, G. Gehlert, H. Gülicher, Statistik für Wirtschaftswissenschaftler, 14. Auflage, Vahlen
- [Bos II] G. Bosse, Grundlagen der Elektrotechnik II, B.I.-Hochschultaschenbücher (1967), B.I.-Wissenschaftsverlag
- [Bos III] G. Bosse, Grundlagen der Elektrotechnik III, ebda
- [Bro] Brockhaus abc physik, VEB F. A. Brockhaus, Leipzig (1973)
- [BrS] Bronstein-Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, 24. Auflage, Harri Deutsch (1989)
- [Den] R. Dengler, Self inductance of a wire loop as a curve integral, [arXiv:1204.1486v2](https://arxiv.org/abs/1204.1486v2) [physics.class-ph] (zuletzt abgerufen am 1.2.2019)
- [EII] R. S. Elliot, Electromagnetics: History, Theory, and Applications (IEEE Press Series on Electromagnetic Waves), Reprint (1. April 1993)
- [Ger] D. Meschede, Gerthsen Physik, 24. Auflage, Springer
- [Jac] E. Jacobson, private Mitteilung
- [JaC] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, Wiley (1962)
- [JaK] J. D. Jackson, Klassische Elektrodynamik, 5. Auflage, de Gruyter (2014)
- [Küp] W. Mathis, A. Reibiger, Küpfmüller Theoretische Elektrotechnik, 20. Auflage, Springer Vieweg (2017)
- [Leo] M. Leone, Theoretische Elektrotechnik, Springer (2018)
- [Sch] K. Schindler, Vorlesung „Elektrodynamik“ (1974), Mitschrift des Verfassers
- [Stö] Stöcker (Hrsg.), Taschenbuch der Physik, Verlag Harri Deutsch (1998)
- [Teu] Teubner – Taschenbuch der Mathematik, 2. Auflage, Teubner (2003)
- [Wiki] <https://de.wikipedia.org/wiki/Skin-Effekt> (zuletzt abgerufen am 20.5.2019)