Differentialgleichungen

zu Kap. 1.0: Einige Definitionen

Def. 1

Gleichungen, in denen Ableitungen einer gesuchten (also noch unbekannten) Funktion auftreten, heißen **Differentialgleichungen** (DGL). Die Ordnung der höchsten in der DGL vorkommenden Ableitung heißt **Ordnung** der DGL.

Def. 2

Eine Lösung einer DGL bezeichnet man auch als Integral dieser DGL (da einige DGL durch Integration gelöst werden können).

Die **allgemeine Lösung** einer DGL n-ter Ordnung enthält noch n offene Parameter (sog. **Integrationskonstanten**). Trifft man für diese Konstanten eine spezielle Wahl, erhält man eine spezielle Lösung, auch **partikuläre Lösung** genannt. Daneben kann es noch Lösungen geben, die sich nicht durch spezielle Wahl der Integrationskonstanten aus der allgemeinen Lösung ergeben: diese Lösungen nennt man **singuläre Lösungen**.

Def. 3

Wenn zusätzlich zu der DGL n-ter Ordnung auch noch Anfangsbedingungen für die gesuchte Funktion vorgegeben sind, liegt ein **Anfangswertproblem** (AWP) vor.

Sei $y(x)$ die gesuchte Funktion, dann kann man bei einer DGL n-ter Ordnung maximal n Anfangsbedingungen vorgeben: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$.

x_0 ist ein Startwert für die unabhängige Variable. Die n-te Ableitung $y^{(n)}(x_0)$ kann man nicht mehr extra vorgeben: sie wird ja schon durch die DGL festgelegt!

Wenn die DGL ein System beschreibt, das sich zeitlich verändert, ist die unabhängige Variable die Zeit t. Als Startwert t_0 wird oft $t_0 = 0$ gewählt. Die Werte y_0 , y_1 , ..., y_{n-1} ergeben sich aus der Aufgabenstellung.

Ein **Randwertproblem** (RWP) liegt vor, wenn die gesuchte Funktion $y(x)$ Bedingungen an mindestens zwei verschiedenen Stellen x_1 und x_2 erfüllen soll.

Da die Berücksichtigung dieser Bedingungen zu einer Festlegung von Integrationskonstanten führt, sind die Lösungen eines AWP oder RWP daher spezielle (also partikuläre) Lösungen der DGL.

Zu Kap. 1.1: Bemerkungen

a)

Physikalisch-technische Gesetze beschreiben oft die Veränderung der relevanten Größe(n). Ableitungen beschreiben Veränderungen: physikalisch-technische Gesetze haben daher oft die Gestalt einer Differentialgleichung. Mit den Worten von Henri Poincare´ (um 1900): „Ein Naturgesetz ist eine unveränderliche Beziehung zwischen der Erscheinung von heute und der von morgen, mit einem Wort: es ist eine Differentialgleichung.“

b)

Wenn man ein reales Problem mathematisch lösen will, muss man die folgenden Schritte durchführen („**Modellbildung und Simulation**“)

1.) physikalisch-technische Modellbildung (z.B. Beschreibung der Anordnung durch ein Federpendel)

2.) mathematische Formulierung (Modellgleichungen)

3.) Lösen der Modellgleichungen (z.B. mit einem Computeralgebrasystem)

4.) Überprüfung der Lösung
- auf mathematische Korrektheit
- auf physikalisch - technische Plausibilität

5.) ggf. Korrektur:
- ist die Lösung mathematisch falsch, muss die Rechnung korrigiert werden
- ist die Lösung physikalisch nicht korrekt, muss das Modell korrigiert werden (z.B.: ist die Beschreibung der Anordnung durch ein Federpendel wirklich zutreffend?)

6.) ggf. Optimierung des Systems:
Variation von Einstellgrößen, die als Parameter in den Modellgleichungen auftreten (z.B. Veränderung der Federkonstante)

1.2 Klassifikation von DGL

Die entsprechende Einordnung der DGL legt oft das Lösungsverfahren fest.

1. Merkmal: **Ordnung**
Die Ordnung der höchsten in der DGL vorkommenden Ableitung heißt Ordnung der DGL.

2. Merkmal: **Anzahl der unabhängigen Variablen**
Hängt die gesuchte Funktion nur von einer Variablen ab, dann treten in der DGL nur gewöhnliche Ableitungen auf und die DGL heißt gewöhnliche DGL.
Hängt die gesuchte Funktion von mehreren Variablen ab, dann treten in der DGL partielle Ableitungen auf und die DGL heißt partielle DGL.

3. Merkmal: **Linearität**
Wenn die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen nur in „einfachen" Termen auftreten, heißt die DGL linear. Einfache Terme haben die Struktur : $+ P_n\, y^{(n)}$; dabei ist P_n eine bekannte Funktion, die als Koeffizient vor der n-ten Ableitung $y^{(n)}$ steht. Wenn dies nicht der Fall ist, heißt die DGL nichtlinear.

4. Merkmal: **Homogenität** (nur bei linearen DGL !!)
Eine lineare DGL heißt inhomogen, wenn sie einen Term enthält, in dem die gesuchte Funktion (oder eine ihrer Ableitungen) nicht vorkommt. Dieser Term wird Inhomogenität genannt. Enthält die DGL keinen solchen Term, heißt sie homogen.
Bem.: Die Inhomogenität stellt in praktischen Anwendungen oft die äußere Anregung (Störung) dar und wird auch Störfunktion genannt.

5. Merkmal: **Art der Koeffizienten**
Sie alle Koeffizienten konstant, spricht man von einer DGL mit konstanten Koeffizienten.