2. DGL 1. Ordnung

2.1 Die lineare homogene DGL

Allgemeine Form: $P_1(x)\, y'(x) + P_0(x)\, y(x) = 0$.

$P_1(x)$ und $P_0(x)$ sind bekannte Funktionen, die sog. Koeffizienten.

Bem.

Es gibt eine sehr einfache Lösung der DGL, nämliche die Nullfunktion $y(x) \equiv 0$ (d.h. $y(x) = 0$ für alle x). Denn für sie gilt ja auch: $y'(x) \equiv 0$ und damit erfüllt die Nullfunktion die DGL. Man nennt sie auch die triviale Lösung.

A) Ein wichtiger Spezialfall : konstante Koeffizienten

$P_1(x) = a_1 = const$, $P_0(x) = a_0 = const$: $a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0$.

Division durch a_1 ($a_1 \neq 0$) ergibt die **Normalform**: $\mathbf{y' + a\, y = 0}$, $a = a_0 / a_1$ **(*)** .

Wie bei gewöhnlichen DGL üblich, hat man das Argument der gesuchten Funktion weggelassen: $y = y(x)$!!

Wir konstruieren jetzt die Lösung der DGL (*) .

1. Lösungsweg: Rückgriff auf Kenntnisse über Funktionen

(*) => $y'(x) = -a\, y(x)$.

Eine Funktion, deren Ableitung bis auf den Faktor (-a) mit der Funktion selber übereinstimmt, ist die e - Funktion $y_1(x) = e^{-a x}$. **Wegen der Linearität** der DGL löst auch $y(x) = c_1\, y_1(x) = c_1\, e^{-a x}$ die DGL (**Beweis durch Probe**).

Da man auch $c_1 = 0$ wählen kann, ist auch die Nullfunktion in der Lösungsformel mit enthalten.

2. Lösungsweg: systematische Integration

(∗) => $y'(x) / y(x) = -a$, wobei $y(x) \neq 0$ vorausgesetzt wird.

Da die linke Seite die Ableitung von $\ln |y(x)|$ (die sog. logarithmische Ableitung) ist, ergibt die Integration beider Seiten:

$$\ln |y(x)| + \tilde{C}_1 = -a x + \tilde{C}_2 \quad \Rightarrow \quad \ln |y(x)| = -a x + \tilde{C}_2 - \tilde{C}_1 = -a x + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow \quad |y(x)| = e^{-ax+\tilde{C}} = e^{\tilde{C}} e^{-ax} \Rightarrow y(x) = \pm e^{\tilde{C}} e^{-ax} = c_1 e^{-a x}.$$

Bem.

Wenn $c_1 \neq 0$, dann ist $y(x) \neq 0$, wie wir es vorausgesetzt haben.
Setzt man $c_1 = 0$, erhält man die Nullfunktion, von der wir ja schon wissen, dass sie die DGL löst. Diese triviale Lösung ist also in der obigen Lösungsformel enthalten.

3. Lösungsweg: Exponentialansatz

Man macht zur Lösung der DGL einen entsprechenden Ansatz, der auf den bisherigen Erfahrungen beruht, den sog. **Exponentialansatz** : $y(x) = e^{\lambda x}$ (λ ist konstant und gesucht !) und geht damit in die DGL:

(∗) => $\lambda e^{\lambda x} + a e^{\lambda x} = 0$ => $\lambda + a = 0$ => $\lambda = -a$.

Damit liefert der Ansatz die Lösung: $y_1(x) = e^{-a x}$.

Wegen der Linearität löst auch $y(x) = c_1 y_1(x) = c_1 e^{-a x}$ die DGL (s.o.).

Bem.

Jede lineare homogene DGL mit konstanten Koeffizienten kann man durch den Exponentialansatz lösen !!

Satz 1 (Zusammenfassung)

1.)

Die **allgemeine** Lösung der DGL **$y'(x) + a\, y(x) = 0$** lautet: $y(x) = c_1\, e^{-a x}$ **.**

„Allgemein" heißt, dass jede Lösung der DGL hat diese Form hat [Braun S.4] .

Da man auch $c_1 = 0$ wählen kann, ist auch die Nullfunktion $y(x) \equiv 0$ eine (spezielle) Lösung der DGL.

2.)

Muss die gesuchte Funktion y(x) neben der DGL noch eine sog. Anfangsbedingung erfüllen, liegt ein **Anfangswertproblem** (AWP) vor. Dadurch wird die Konstante c_1 festgelegt:

Sei $y(x_0) = y_0$ (AWP in allgemeiner Form). Eingesetzt in die allgemeine Lösung erhält man:

$$y(x_0) = c_1\, e^{-ax_0} = y_0 \quad => \quad c_1 = y_0\, e^{ax_0} \quad .$$

Damit lautet die Lösung des AWP (dies ist eine spezielle Lösung der DGL) :

$$y(x) = y_0\, e^{ax_0}\, e^{-a x} = y_0\, e^{-a(x-x_0)} \; .$$

Die Lösung des AWP ist eindeutig.

Insbesondere wird das AWP $y(x_0) = 0$ nur durch die Nullfunktion gelöst.

B) Der allgemeine Fall : beliebige stetige Koeffizienten

Die DGL $P_1(x)\, y'(x) + P_0(x)\, y(x) = 0$ wird durch $P_1(x)$ dividiert. Dabei wird $P_1(x) \neq 0$ vorausgesetzt; ggf. muss man Intervalle zwischen den Nullstellen betrachten. Man erhält so die **Normalform** der DGL: $\mathbf{y'(x) + P(x)\, y(x) = 0}$, $P(x) := P_0(x) / P_1(x)$ $\mathbf{(**)}$

Bem.
Der Exponentialansatz geht hier nicht !

Setzt man $y(x) = e^{\lambda x}$ (λ ist <u>konstant</u>) und geht damit in die DGL, erhält man :

$\mathbf{(**)}$ => $\lambda e^{\lambda x} + P(x)\, e^{\lambda x} = 0$ => $\lambda + P(x) = 0$ => $\lambda = - P(x)$.

Damit ist λ also nicht konstant: dies ist ein Widerspruch zum Ansatz !

Die Lösung kann aber so wie im obigen 2. Lösungsweg konstruiert werden.

Satz 2:

Wir untersuchen die DGL $\mathbf{y' + P(x)\, y = 0}$, $y = y(x)$, $P(x)$ sei stetig im einem Intervall I .

1.)

In diesem Intervall lautet **die allgemeine Lösung** der DGL: $y(x) = c_1\, e^{-Q(x)}$.

$Q(x)$ ist <u>eine</u> Stammfunktion von $P(x)$: $Q(x) = \int P(x)dx$, wobei die Integrationskonstante C frei wählbar ist (z.B. C = 0). Allerdings kann diese Integration oft nicht analytisch durchgeführt werden.

2.)

Das **AWP** $y(x_0) = y_0$ hat eine **eindeutige Lösung**, nämlich:

$$y_{awp}(x) = y_0\, e^{Q(x_0)}\, e^{-Q(x)} = y_0\, e^{-(Q(x)-Q(x_0))} .$$

3.)

Wenn die Integration **numerisch** erfolgen muss, ist folgende Darstellung besser:

$$y_{awp}(x) = y_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt} .$$

Beweis: verläuft analog zum 2. Lösungsweg in (A)

1.)

(∗ ∗) => $y'(x) / y(x) = - P(x)$, wobei $y(x) \neq 0$ vorausgesetzt wird.

Die linke Seite die Ableitung von $\ln |y(x)|$ (die sog. logarithmische Ableitung).

Ihre Integration ergibt also $\ln |y(x)| + \tilde{C}_1$.

Die Integration der rechten Seite ergibt die allgemeine Stammfunktion von $- P(x)$,

also: $- (Q(x) + \tilde{C}_2)$.

Wir haben also:

$$\ln |y(x)| + \tilde{C}_1 = - (Q(x) + \tilde{C}_2) \quad \Rightarrow \quad \ln |y(x)| = - Q(x) - \tilde{C}_2 - \tilde{C}_1 = - Q(x) + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow \quad |y(x)| = e^{-Q(x)+\tilde{C}} = e^{\tilde{C}} e^{-Q(x)} \Rightarrow y(x) = \pm e^{\tilde{C}} e^{-Q(x)} = c_1 e^{-Q(x)} .$$

Wenn $c_1 \neq 0$, dann ist $y(x) \neq 0$, wie wir es vorausgesetzt haben.

Setzt man $c_1 = 0$, erhält man die Nullfunktion, welche auch die DGL **(∗ ∗)** löst.

Diese triviale Lösung ist also in der obigen Lösungsformel enthalten.

2.)

Die Lösung des AWP ergibt sich unmittelbar aus der allgemeinen Lösung.

3.)

Da Q(x) eine (beliebige) Stammfunktion von P(x) ist, gilt: $Q(x) = \int_a^x P(t)dt$

(die untere Grenze ist beliebig).

$Q(x) - Q(x_0) = \int_a^x P(t)dt - \int_a^{x_0} P(t)dt = \int_{x_0}^x P(t)dt$. Dieses Integral steht im Exponenten.

2.2 Die lineare inhomogene DGL

Allgemeine Form: $P_1(x)\, y'(x) + P_0(x)\, y(x) = R_i\,(x)$.

$R_i\,(x)$ ist die Inhomogenität, die traditionell auf die rechte Seite der DGL geschrieben wird. Nach der Division durch $P_1(x)$ erhält man die

Normalform: $y'(x) + P(x)\, y(x) = R(x)$, wobei $R(x) = R_i\,(x) / P_1(x)$.

Satz 1

Geg. sei die **lineare inhomogene DGL $y'(x) + P(x)\, y(x) = R(x)$** . Außerdem soll gelten:
$y(x_0) = y_0$ (AWP). Das Lösungsverfahren gliedert sich in die folgenden Schritte:

1. Schritt:

Man bestimmt zunächst d i e allgemeine Lösung $y_H(x)$ der zugehörigen homogenen DGL $y'(x) + P(x)\, y(x) = 0$.

2. Schritt:

Dann bestimmt man e i n e Funktion $y_i\,(x)$, welche die inhomogene DGL erfüllt. $y_i(x)$ ist eine sog. partikuläre (= spezielle) Lösung der inhomogenen DGL.

3. Schritt:

D i e allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet dann $y(x) = y_H(x) + y_i\,(x)$.

4. Schritt:

Die Bestimmung der Integrationskonstanten erfolgt mit Hilfe der Anfangsbedingung. Diese Angangsbedingung bezieht sich jetzt auf die inhomogene DGL. Die Lösung des AWP ist eindeutig.

Bem.

1) Der Satz gilt **für alle linearen** DGL .
2) In den Anwendungen stellt die Inhomogenität $R_i(x)$ oft eine äußere Anregung (Störung) des Systems dar (“Störfunktion”) .
3) Die Nullfunktion ist keine Lösung der inhomogenen DGL .

A) Ein wichtiger Spezialfall : <u>konstante</u> Koeffizienten, d.h. $y'(x) + a\,y(x) = R(x)$

In diesem Fall kann man zur Ermittlung der partikulären Lösung y_i (x) mit einem **Ansatz** arbeiten, der sich an der **Form der Störfunktion** orientiert.

Anschauliche Begründung:
ein System mit konstanten Komponenten werde durch eine DGL mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Ein solches System kann man auch als „passiv" bezeichnen.
Seine Reaktion auf die äußere Anregung wird von der Form wie diese Anregung sein.

Ansätze für typische (**einfache**) Störfunktionen:

Störfunktion	Ansatz für y_i (x)
$R(x) = \text{const}$	$y_i(x) = d$ (also auch konstant)
$R(x) = A\cos(kx)$	$y_i(x) = d_1\cos(kx) + d_2\sin(kx)$
$R(x) = A\sin(kx)$	$y_i(x) = d_1\cos(kx) + d_2\sin(kx)$
$R(x) = A\,e^{\alpha x}$	$y_i(x) = d\,e^{\alpha x}$
$R(x) = a\,x + b$	$y_i(x) = d_1\,x + d_2$

Mit dem geeigneten Ansatz geht man in die DGL und bestimmt die noch offenen Parameter des Ansatzes. Wenn der Ansatz nicht zum Erfolg führt, man die Parameter also nicht bestimmen kann, muss man einen neuen Ansatz gibt.

B) Der allgemeine Fall : beliebige stetige Koeffizienten

Bspl.: $y' + x\,y = 4$; $P(x) = x$, $R(x) = 4$ konstante Störfunktion .

Ein Ansatz für $y_i(x)$ in Form der Störung geht nicht mehr!

Ein solcher Ansatz, also $y_i(x) = d$ (= const), liefert:

$0 + x\,d = 4 \Rightarrow d = 4/x$: dies ist aber ein **Widerspruch**.

Wir benötigen also ein anderes Verfahren!

Anschauliche Begründung: die Komponenten des Systems sind jetzt selber veränderlich.

Man lässt sich bei der Suche nach der partikulären Lösung der inhomogenen DGL von der Form der Lösung der zugehörigen homogenen DGL leiten: $y_H(x) = c_1\, e^{-Q(x)}$ und greifen wieder zum Verfahren "Variation der Konstanten" .

Man macht also den Ansatz: $y_i(x) = c(x)\, e^{-Q(x)}$.

Mit diesem Ansatz gehen wir in die DGL. Das Ergebnis ist im nächsten Satz festgehalten.

Satz 2

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL **$y'(x) + P(x)\, y(x) = R(x)$** ist gegeben durch:

$y_i(x) = c(x)\, e^{-Q(x)}$, $c(x) = \int R(x) e^{Q(x)} dx$, wobei $Q(x)$ eine Stammfunktion von $P(x)$ ist.

Bem.

Satz 2 gilt natürlich auch für konstante Koeffizienten. Er gilt für beliebige (stetige) Inhomogenitäten. **Das Integral kann oft nur numerisch ermittelt werden**.