2.3 Separable Differentialgleichungen

Def. 1

Separable Differentialgleichungen sind DGL der Form $y' = f(x) g(y)$, $y = y(x)$ (*).
Man muss also die DGL nach y' auflösen und die rechte Seite als Produkt schreiben können, wobei ein Faktor nur von x und der andere Faktor unmittelbar nur von y abhängt. $f(x)$ und $g(y)$ sollen stetig sein.

Separable Differentialgleichungen werden gelöst, indem man das Verfahren „**Trennung der Variablen**“ anwendet (s. nächster Satz1). Daher kommt auch die Bezeichnung „separabel“. Diese Trennung der Variablen ist deshalb möglich, weil die Variablen x und y in verschiedenen Faktoren vorkommen.

Bspl.

Satz 1 (Lösungsverfahren für separable DGL)

1. Lösungstyp:

Es gibt u.U. **konstante Funktionen**, welche die DGL lösen. Diese Funktionen erhält man, indem man die Nullstellen des Faktors $g(y)$ sucht. Sei y_1 eine Nullstelle, also $g(y_1) = 0$. Dann gilt für die **konstante Funktion** $y(x) \equiv y_1 : y'(x) = 0$. Eingesetzt in die DGL (*) erhält man dann: $0 = f(x) g(y_1) = f(x) * 0 = 0$.

2. Lösungstyp:

Da wir die Nullstellen von $g(y)$ im 1. Lösungstyp behandelt haben, können wir jetzt voraussetzen, dass $g(y) \neq 0$. Unter dieser Voraussetzung kann man die DGL

dividieren: $y' = f(x) g(y) \Rightarrow \frac{y'(x)}{g(y)} = f(x)$. Nun ist $y'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ kann man in diesem Verfahren wie einen Bruch

behandeln; dann erhält man: $\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$. Beide Seiten werden jetzt bezüglich

der jeweiligen Variablen integriert: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$.

Anschließend muss nach der gesuchten Funktion $y = y(x)$ aufgelöst werden.

Dabei können sich mehrere Lösungsfunktionen ergeben!

Bem.

Wenn zusätzlich zur DGL noch eine Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ gegeben ist, muss man sich überlegen, welche der gefundenen Lösungsfunktionen diese Bedingung erfüllen kann. Wenn nur eine einzige Lösungsfunktion das AWP lösen kann, dann ist die Lösung des AWP eindeutig. Anschaulich argumentiert ist das dann der Fall, wenn die Wertebereiche der verschiedenen Lösungsfunktionen disjunkt sind (also nicht überlappen).