3. Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

3.1 Die homogene DGL

Bei den DGL 2.Ordnung beschränken wir uns von Anfang an auf lineare DGL mit konstanten Koeffizienten. Sie hat die allgemeine Form:

$\mathbf{a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0}$, $y = y(x)$, $a_2 \neq 0$, die Koeffizienten a_i sind reelle Zahlen .

Normalform: $y''(x) + p\, y'(x) + q\, y(x) = 0$, $p = a_1/ a_2$, $q= a_0/ a_2$.

Bem.
Eine lineare homogene DGL mit nicht-konstanten Koeffizienten hat die allgemeine Form:
$P_2(x)\, y''(x) + P_1(x)\, y'(x) + P_0(x)\, y(x) = 0$. $P_2(x)$, $P_1(x)$ und $P_0(x)$ sind bekannte Funktionen.
Nichtlineare DGL sind interessant, aber auch schwierig, u.a. weil es keine allgemeine Lösungstheorie gibt.
Für beiden Typen gilt: in einigen Fällen kann man eine solche DGL durch spezielle Ansätze lösen. Eine Alternative ist die **numerische Lösung der DGL**, heute vorzugsweise mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms.

Satz 1
Für jede lineare homogene DGL 2.Ordung gilt: es gibt genau zwei verschiedene (man sagt: linear unabhängige) Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$, welche die homogene DGL lösen [dimensionality theorem] .
Wegen der Linearität der DGL löst auch die **Linearkombination** (Überlagerung, Superposition) $\mathbf{y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)}$ die DGL. Sie ist sogar die allgemeine Lösung der homogenen DGL (jede Lösung hat diese Form).
Hat die DGL konstante Koeffizienten, ist die Lösung überall definiert.
Die Nullfunktion ist eine spezielle Lösung ($c_1 = c_2 = 0$) .
Ein AWP besteht aus der DGL und den beiden Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = y_1$ und ist eindeutig lösbar: durch die Anfangsbedingungen werden die Integrationskonstanten c_1 und c_2 eindeutig festgelegt
[existence – uniqueness - theorem] .

A) Vorüberlegungen: die spezielle Situation $a_1 = 0$ (die 1. Ableitung tritt nicht auf):

$y'' + q\,y = 0$ ($q = a_0/a_2$)

Nach unseren Erfahrungen mit der linearen homogenen DGL 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten versuchen wir, auch diese DGL durch einen **Exponentialansatz** lösen:

$y = y(x) = e^{\lambda x}$. Mit diesem Ansatz gehen wir in die DGL und erhalten:

$\lambda^2 + q = 0 \iff \lambda^2 = -q$

Die Lösung der DGL verwandelt sich so in das Problem, die Nullstellen eines Polynoms (in λ) zu bestimmen; man nennt es das **charakteristische Polynom** der DGL. Wir müssen drei Fälle unterscheiden:

1) **$q < 0$** ; dann ist $-q$ positiv und es gibt zwei reelle Nullstellen: $\lambda_1 = \sqrt{|q|}$, $\lambda_2 = -\sqrt{|q|}$.

   Der Exponentialansatz liefert also die beiden Lösungen $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.
   Die <u>allgemeine Lösung</u> lautet damit: $y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$.

2) **$q > 0$** ; dann ist $-q$ negativ und es gibt zwei komplexe (hier rein imaginäre) Nullstellen:
   $\lambda_1 = i\sqrt{q}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{q}$.

   Der Exponentialansatz liefert die beiden **komplexen Lösungen** (Kennzeichnung: ^{C})

   $y_1^C(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{i\sqrt{q}\,x}$, $y_2^C(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-i\sqrt{q}\,x}$.

   Die <u>allgemeine Lösung</u> lautet damit: $y(x) = \tilde{c}_1\, y_1^C(x) + \tilde{c}_2\, y_2^C(x)$.

   Die **reelle Darstellung der allgemeinen Lösung** erhält man mit Hilfe der Euler'schen Formel: $y(x) = c_1 \cos(\sqrt{q}\,x) + c_2 \sin(\sqrt{q}\,x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$.

3) **$q = 0$** ; $\lambda = 0$ ist eine doppelte reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

   Der Exponentialansatz liefert also zunächst nur die Lösung $y_1(x) = e^{0x} = 1$.
   Die DGL $y'' = 0$ kann auch direkt durch Integration gelöst werden:
   $y(x) = c_1 + c_2\, x = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$.

Bspl.

B) Die allgemeine Situation (mit 1. Ableitung , $a_1 \neq 0$)

Satz 2

Die lineare homogene DGL 2.Ordung mit konstanten Koeffizienten, also die DGL

$y''(x) + p\, y'(x) + q\, y(x) = 0$, wird durch den Exponentialansatz $y = e^{\lambda x}$ gelöst.

Eingesetzt in die DGL erhält man die quadratische Gleichung $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

$\lambda^2 + p\lambda + q$ heißt charakteristisches Polynom der DGL.

Seine Nullstellen sind $\lambda_1 = -p/2 + \sqrt{D}$ und $\lambda_2 = -p/2 - \sqrt{D}$.

Die Art der Nullstellen wird (wie üblich) durch die Diskriminante $D = (p/2)^2 - q$ bestimmt.

Fall 1: $D > 0$, beide Nullstellen sind reell. Der Exponentialansatz liefert also die Lösungen

$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.

Fall 2: $D < 0$, beide Nullstellen sind komplex: $\lambda_{1,2} = -p/2 \pm i\sqrt{|D|} := \alpha \pm i\,ß$

Der Exponentialansatz liefert also die komplexen Lösungen

$y_1^c(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2^c(x) = e^{\lambda_2 x}$. Mit Hilfe der Euler'schen Formel kann man reelle Lösungsfunktionen erzeugen:

$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(ßx)$, $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(ßx)$.

Fall 3 : $D = 0$, doppelte Nullstelle $\lambda = -p/2$

Durch den Ansatz finden wir nur eine Funktion, welche die DGL löst:

$y_1(x) = e^{\lambda x}$.

Zur Konstruktion der zweiten Lösung benutzt man das Verfahren "Variation der Konstanten" , d.h. man macht den Ansatz: $y(x) = c(x)\, y_1(x)$.

Wir erhalten durch diesen Ansatz: $y_2(x) = x\, y_1(x)$.

Die allgemeine Lösung ist die Linearkombination $y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$.

Bem.

1) Merkregel: durch den Exponentialansatz wird die n-te Ableitung $y^{(n)}$ ersetzt durch λ^n .
2) **Jede** lineare homogene DGL der **Ordnung n** kann durch einen Exponentialansatz gelöst werden. Man findet n linear unabhängige Lösungen, deren Linearkombination dann die allgemeine Lösung der DGL ist.

3.2 Die inhomogene DGL

Allgemeine Form: $a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = R_i(x)$; $R_i(x)$ stetig.

Normalform: $y''(x) + p\, y'(x) + q\, y(x) = R(x)$; $R(x) = R_i(x)/ a_2$

Satz 3

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL $y''(x) + p\, y'(x) + q\, y(x) = R(x)$ ergibt sich wie bei den linearen DGL 1. Ordnung (s. Kap. 2.2, Satz 1) als Linearkombination $y(x) = y_H(x) + y_i(x)$, wobei $y_H(x)$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL und $y_i(x)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL ist.

Ein AWP besteht aus der inhomogenen DGL und den beiden Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = y_1$ und ist eindeutig lösbar: durch die Anfangsbedingungen werden die Integrationskonstanten c_1 und c_2 eindeutig festgelegt

Die Bestimmung von $y_i(x)$ kann erfolgen durch:

A) durch Variation der Konstanten (allgemeine Methode; geht auch bei nicht-konstanten Koeffizienten !!)

B) durch spezielle Ansätze in Form der Störfunktion (nur bei einfachen Störfunktionen und nur bei konst. Koeffizienten !!).

A) Variation der Konstanten:

Da die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL $y_H(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$ ist, wobei c_1 und c_2 die noch offenen Integrationskonstanten sind, macht man bei „Variation der Konstanten“ den Ansatz: $y_i(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)$, wobei $c_1(x)$ und $c_2(x)$ jetzt gesuchte Funktionen sind. Man erhält:

$c_1(x) = -\int y_2(x)\frac{R(x)}{W(x)}\,dx$, $c_2(x) = \int y_1(x)\frac{R(x)}{W(x)}\,dx$, wobei $W(x) = y_1(x)y_2{}' - y_2(x)y_1{}'(x)$.

B) Ansätze in Form der Störfunktion:

Man macht dieselben Ansätze wie bei den linearen DGL 1. Ordnung (mit konstanten Koeffizienten). Wenn die Störfunktion („zufällig“) so beschaffen ist, dass sie selber eine Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist, muss ein einfacher Ansatz in Form der Störfunktion versagen.