Fourier – Entwicklung (Approximation durch trigonometrische Summen)

1. Problemstellung

In vielen Anwendungen treten periodische Funktionen f auf. Am häufigsten sind sicher zeitlich periodische Vorgänge (also Schwingungen jedweder Art): $f = f(t)$.
Es gibt aber auch räumlich periodische Vorgänge (z.B. das Muster eines Wellblechs): $f = f(x)$

Zeitlich periodische Vorgänge: Periode p = Schwingungsdauer T, d.h. $f(t + T) = f(t)$
Frequenz $\nu = 1/T$, Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu = 2\pi / T$

Räumlich periodische Vorgänge: Periode p = Wellenlänge λ , d.h. $f(x + \lambda) = f(x)$
Wellenzahl $k = 2\pi / \lambda$

In Wellenbewegungen kann beides auftreten: $f = f(x, t)$; die beiden Variablen sind u.U. nicht unabhängig voneinander, d.h. Frequenz und Wellenlänge hängen voneinander ab (sog. Dispersionsrelation).

Mathematisch: Die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind Prototypen periodischer Funktionen. Die Periode p ist gleich 2π : $f(x + 2\pi) = f(x)$

Sei $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \cos(2\omega t) + ... + \alpha_N \cos(N\omega t) +$
$+ \beta_1 \sin(\omega t) + \beta_2 \sin(2\omega t) + ... + \beta_N \sin(N\omega t)$ (*) ,

dann hat $f(t)$ die Periode $p = T = 2\pi / \omega$, also $f(t + T) = f(t)$.
ω ist die Grund (-Kreis-) Frequenz, $n\omega$ sind ganzzahlige Vielfache,
$\alpha_1 \cos(\omega t) + \beta_1 \sin(\omega t)$ stellt die Grundschwingung dar,
$\alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t)$ die (n - 1)te Oberschwingung ($n > 1$) .
Man kann die beiden Terme einer Schwingung auch zusammenfassen, s. Abschnitt 4 .
Die (n - 1)te Oberschwingung hat die Periode T/n , die gemeinsame Periode aller Schwingungen ist T !

Frage: Kann man eine beliebige periodische Funktion, z.B. eine periodische Abfolge von Rechtecks-Impulsen (→ Bspl.) , durch eine Summe wie (*) , also durch eine sog. trigonometrische Summe, darstellen oder zumindest approximieren?

2. Fourier- Koeffizienten

Sei f(t) eine zeitabhängige Funktion mit der Periode T , $\omega = 2\pi / T$.
Dann gibt es für diese Funktion die Darstellung

f(t) = s_N (t) + Rest , wobei

s_N (t) = a_0 / 2 + $\sum_{n=1}^{N} [a_n \cos(n\omega\, t) + b_n \sin(n\omega\, t)]$

die **trigonometrische Summe (mit 2N+1 Gliedern)** ist. Die Koeffizienten werden wie folgt berechnet:

$a_n = \dfrac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega\, t)\; dt$, d.h. insbesondere $a_0 = \dfrac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$ und

$b_n = \dfrac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega\, t)\; dt$, d.h. insbesondere $b_0 = 0$. (**)

Mit diesen so berechneten Koeffizienten ist die obige Darstellung der Funktion f(t) die **bestmögliche Approximation durch eine trigonometrische Summe (mit 2N+1 Gliedern)**, und zwar für die gesamte Periode [-T/2 , T/2] und damit für alle t !

Die Darstellung heißt **Fourier-Entwicklung, Fourier-Zerlegung, Fourier-Analyse oder harmonische Analyse** der Funktion f(t) . Die Koeffizienten heißen **Fourier-**Koeffizienten, die einzelnen Terme Fourier-**Komponenten**.

Bem.
Bei räumlich periodischen Vorgängen müssen natürlich nur die Namen der entsprechenden Größen ausgetauscht werden: t $\rightarrow$ x , $\omega \rightarrow k$.

Bspl.

Bem.:

1)

Zur Erinnerung:

$\frac{1}{L}\int_{a}^{a+L} f(x)dx$ ist wird als Mittelwert der Funktion f(x) im Intervall [a , a + L] definiert.

Der Term a_0 /2 ist also der Mittelwert der periodischen Funktion f(t) im Intervall [-T/2, T/2] .

2)

Die Berechnung der Integrale kann im Prinzip über ein beliebiges Intervall der Länge T erfolgen. In der Regel wird [-T/2 , T/2] als Integrationsintervall genommen (siehe **) . oder [0, T] ; dann lautet die Berechnungsvorschrift:

$a_n = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(t)\cos(n\omega\, t)\ dt$, $b_n = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(t)\sin(n\omega\, t)\ dt$

3)

Ist f(t) eine <u>gerade</u> Funktion, so gilt : $b_n = 0$ für alle n (die Fourier-Entwicklung enthält nur cosinus-Terme);

Ist f(t) eine <u>**un**gerade</u> Funktion, so gilt : $a_n = 0$ für alle n (die Fourier-Entwicklung enthält nur sinus-Terme) .

4)

Bei der Taylorentwicklung wird eine Funktion durch ein Polynom, also eine Summe von Potenzfunktionen, approximiert. „Vollkommene“ Übereinstimmung (zumindest im Funktionswert und den ersten n Ableitungen) gibt es am Entwicklungspunkt (daraus ergeben sich ja die Koeffizienten des Taylorpolynoms), weiter weg davon wird die Diskrepanz größer. Hat man das Taylorpoylom n-ter Ordnung ermittelt und will man die Approximation verbessern, muss man für das Polynom mit der nächsthöheren Ordnung den Koeffizienten des noch fehlenden Terms, also $f^{(n+1)}(x_0) / (n+1)!$, extra berechnen.

Bei der Fourierentwicklung wird eine (periodische) Funktion durch eine Summe von 2N + 1 trigonometrischen Funktionen approximiert. Die Approximation soll <u>überall „gleich gut“</u> sein.

Als Maß für die Güte der Approximation, also als Maß für den Fehler, wird die folgende Größe genommen: $\Delta = \dfrac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} [\,f(t) - s_N(t)]^2 \; dt$. Δ ist die mittlere quadratische Abweichung zwischen der Funktion f(t) und der Summe $s_N(t)$. Man spricht daher auch von der „**Approximation im quadratischen Mittel**“ .

Um die Berechnungsvorschrift für die Koeffizienten herzuleiten, betrachtet man in $s_N(t)$ die Koeffizienten zunächst als noch unbestimmte Parameter. Damit wird Δ eine Funktion dieser Parameter: $\Delta = \Delta(a_0, a_1, ...a_N , b_1, ..b_N)$. Δ ist damit eine Funktion von 2 N + 1 Variablen. Dann fordert man, dass Δ minimal wird: man spricht deshalb auch von der „**Methode der kleinsten Quadrate**“.
Dazu man muss alle 2 N + 1 (ersten) Ableitungen von Δ bilden. Da bei jeder dieser Ableitungen nur nach einer der Variablen abgeleitet wird (die anderen werden als konstant angesehen), heißen solche Ableitungen „**partielle Ableitungen**“. Anschließend setzt man alle partiellen Ableitungen Null: daraus ergeben sich gerade die obigen Formeln (**) für die Fourier-Koeffizienten.

Man kann mit einer einzigen Berechnung der beiden Integrale <u>alle</u> Fourierkoeffizienten ermitteln.

5)
Für einige wichtige (standardisierte) Funktionen sind die Fourierdarstellungen tabelliert. Standardisiert meint z.B. eine Standard-Periode, meist 2π . Man muss dann einige Umrechnungen vornehmen, um die tabellierte Funktion der eigenen anzupassen.

6)
Viele technisch wichtige periodische Funktionen haben Sprungstellen, z.B. die Abfolge von Rechtecks-Impulsen. An der Sprungstelle kann es keine Übereinstimmung zwischen der Funktion und der approximierenden trigonometrischen Summe geben, denn letztere ist ja im Gegensatz zu f(t) stetig ! An einer solchen Sprungstelle geht die Fourier-**Reihe** s(t) (das ist die Fourier-**Summe,** also die trigonometrischen Summe, für $\mathbf{N} \rightarrow \infty$) genau durch „die Mitte der Sprung-Lücke“, math.: $s(t_{sprung}) = (L + R) / 2$, wobei L der linksseitige Grenzwert von f(t) bei der Annäherung an die Sprungstelle t_{sprung} ist und R der rechtsseitige Grenzwert.

3. Die Fourier-Reihe

Man kann man bei der Fourierentwicklung immer höhere Ordnungen (immer größeres N) berücksichtigen und schließlich den Grenzübergang $N \to \infty$ untersuchen.
Formal geht die endliche trigonometrische Summe in eine (unendliche) Reihe über. Es stellt sich damit (wie bei der Taylorreihe) die Frage nach der Konvergenz!

Es gilt:
Wenn die periodische Funktion f(t) innerhalb einer Periode nur endliche viele (endliche) Sprungstellen oder Knicke (das sind dann Sprungstellen der ersten Ableitung) hat (sog. Dirichlet-Bedingung) , dann konvergiert die Reihe für **alle** t :

$$s(t) = \lim_{N\to\infty} s_N(t) = a_0 / 2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega\, t) + b_n \sin(n\omega\, t)] \quad .$$

s(t) heißt **Fourier-Reihe**. **Überall dort, wo die Funktion stetig ist, gilt: f(t) = s(t)** .
An den Sprungstellen gilt wieder: $s(t_{sprung}) = (L + R) / 2$.
Die Approximation einer solchen Funktion durch eine endliche trigonometrische Summe kann also verbessert werden, indem man die Ordnung N erhöht.

Bspl.
Der Sägezahn mit $f(t) = t$, Grundintervall $[-\pi, \pi]$, Periode $T = 2\pi$, $\omega = 1$:

Fourier-Reihe $s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$ mit $b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$;

Es gilt:
$f(t) = s(t)$ außer an den Sprungstellen t_{sprung} (alle ungradzahligen Vielfachen von π);
dort gilt: $s(t_{sprung}) = 0$

Bem.
Knicke und vor allem Sprünge verlangsamen die Konvergenz, d.h. man muss mehr Terme berücksichtigen, um eine gute Übereinstimmung zu bekommen. Dabei kommt es dann an Sprungstellen zu Überschwingern (sog. Gibbs'sches Phänomen).
(→ Bilder)

4. Spektraldarstellung; komplexe Darstellung

A) Eine **kompakte reelle Darstellung** erhält man durch Anwenden der Additionstheoreme:

s(t) = $a_0 / 2 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \sin(n\omega\, t + \varphi_n)]$, wobei $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ die Amplitude

der n-ten Schwingung ist (n=1: Grundschw. , n>1: Oberschw.) und $\tan(\varphi_n) = a_n / b_n$,

n = 1, ... , N ; $A_0 = | a_0 / 2 |$. Herleitung:

$$A_n \sin(n\omega\, t + \varphi_n) = A_n \sin(n\omega\, t)\cos(\varphi_n) + A_n \cos(nw\, t)\sin(\varphi_n)$$

[Additionstheoreme]

$$= a_n \cos(n\omega\, t) + b_n \sin(n\omega\, t)$$

[das wird gefordert]

Daraus folgt durch Koeffizientenvergleich :

$$A_n \cos(\varphi_n) = b_n \; und \; A_n \sin(\varphi_n) = a_n \;\Rightarrow\; a_n^2 + b_n^2 = A_n^2 \quad \text{und} \quad \tan(\varphi_n) = a_n / b_n \; .$$

Trägt man die Amplituden A_n der Schwingungen gegen die Frequenz $\omega_n = n\omega$ auf, erhält man das **diskrete Spektrum** der Funktion f(t) . Das Spektrum ist das entscheidende Charakteristikum der Funktion.

B) Eine **komplexe Darstellung** erhält man über die Euler'sche Formel:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2 \; ,$$

$$\sin\varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) / (2i) \; .$$

Setzt man diese komplexen Darstellungen der trigonometrischen Funktionen mit $\varphi = \omega\, t$ in s(t) ein und fasst die Terme mit $e^{i n \omega t}$ bzw. $e^{-i n \omega t}$ zusammen, erhält man

s(t) = $a_0 / 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \, e^{in\omega t} + c_n{}^* e^{-in\omega t})$, wobei

$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt$ die **komplexen Fourier-Koeffizienten** sind

(die Integration kann natürlich auch wieder im Intervall [0, T] erfolgen). Da $c_n = a_n /2 - i\, b_n /2$, ergeben sich die reellen Fourier-Koeffizienten dann aus:

$a_n = c_n + c_n{}^* = 2 \operatorname{Re}(c_n)$, $b_n = i (c_n - c_n{}^*) = - 2 \operatorname{Im}(c_n)$.

Für die reelle Amplitude gilt: $A_n = 2 | c_n |$.