```
(* Mathe Vertiefung Übung 5 ; Lösung zu einigen Aufgaben *)

Remove["Global`*"]

(* 1 *)

(* die Formel für die Bogenlänge, bei explizit geg. Funktion *)

In[4]:= L[a_, b_] := Integrate[Sqrt[1 + f'[x]^2], {x, a, b}]

(* a *)

In[1]:= f[x_] := x^2 / 2

(* zunächst das unbestimmte Integral *

In[2]:= Integrate[Sqrt[1 + f'[x]^2], x] + C
```

Out[2]= $C + \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \text{ArcSinh}[x]\right)$

```
(* die Bogenlänge als bestimmtes Integral: *)

In[5]:= L[-1, 1]
```

Out[5]= $\sqrt{2} + \text{ArcSinh}[1]$

```
In[6]:= N[%]

Out[6]= 2.29559

(* b *)

f[x_] := Cosh[x]

Integrate[Sqrt[1 + f'[x]^2], x] + C
```

$C + \sqrt{\text{Cosh}[x]^2}\ \text{Tanh}[x]$

$\text{Simplify}\left[C + \sqrt{\text{Cosh}[x]^2}\ \text{Tanh}[x]\right]$

```
C + Sinh[x]

L[0, 2]

Sinh[2]

N[Sinh[2]]

3.62686

(* die Formel für die Bogenlänge bei Parameter-Darstellung *)
```

```
L[t1_, t2_] :=
 Integrate[Sqrt[x'[t]^2 + y'[t]^2], {t, t1, t2}, Assumptions → {T > 0}]

(* bei der Vereinfachung des Integranden muss t>0;
dies wird durch T>0 gewährleistet *)


(* c *)

x[t_] := t^2

y[t_] := t^3 / 3

L[0, T]
```

$$\frac{1}{3}\left(-8+4\sqrt{4+T^2}+T^2\sqrt{4+T^2}\right)$$

```
(* d *)

x[t_] := 2 Exp[t^2]

y[t_] := 3 Exp[t^2]

L[0, T]
```

$$\sqrt{13}\left(-1+e^{T^2}\right)$$

```
(* 2 *)

(* Parameterdarstellung der Kurve: *)

Clear[a]

x[ϕ_] := a ϕ Cos[ϕ]

y[ϕ_] := a ϕ Sin[ϕ]

(* das unbestimmte Integral: *)

Integrate[Sqrt[x'[ϕ]^2 + y'[ϕ]^2], ϕ, Assumptions → {a > 0, ϕ > 0}] + C
```

$$C+\frac{1}{2}a\left(\phi\sqrt{1+\phi^2}+\text{ArcSinh}[\phi]\right)$$

```
(* die Bogenlänge als bestimmtes Integral: *)

L = Integrate[Sqrt[x'[ϕ]^2 + y'[ϕ]^2], {ϕ, 0, 2 Pi}, Assumptions → {a > 0}]
```

$$\frac{1}{2}a\left(2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\text{ArcSinh}[2\pi]\right)$$

```
(* 3 *)

f[x_] := x^3

(* Mathematica hat eine eingebaute
 spezielle Funktion für die gesuchte Stammfunktion: *)

Integrate[Sqrt[1 + f'[x]^2], x] + C
```

$$C + \frac{1}{9\sqrt{1+9x^4}} \left(3\left(x+9x^5\right) - 2(-1)^{1/4}\sqrt{3+27x^4}\ \text{EllipticF}\left[i\ \text{ArcSinh}\left[(1+i)\sqrt{\frac{3}{2}}\ x\right], -1\right]\right)$$

```
Clear[L]

(* die gesuchte Bogenlänge: *)

L = Integrate[Sqrt[1 + f'[x]^2], {x, 0, 0.5}]
```

0.526268

```
(* über Taylor: *)

int[x_] = Sqrt[1 + f'[x]^2]
```

$$\sqrt{1+9x^4}$$

```
inttp[x_] = Series[int[x], {x, 0, 8}] // Normal
```

$$1 + \frac{9x^4}{2} - \frac{81x^8}{8}$$

```
(* über den "Taylor-Trick": *)

intu[u_] = Sqrt[1 + u]
```

$$\sqrt{1+u}$$

```
Series[intu[u], {u, 0, 2}] // Normal
```

$$1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8}$$

```
% /. u → 9 x^4
```

$$1 + \frac{9x^4}{2} - \frac{81x^8}{8}$$

```
(* Jetzt wird der so approximierte Integrand integriert: *)

Integrate[inttp[x], {x, 0, 0.5}]
```

0.525928

```
(* 4 *)

(* Formel für das Volumen eines Rotationskörpers,
wenn das Kurvenstück z = f(x) um die x-Achse rotiert wird: *)

Clear[f]

V = Pi * Integrate[f[x]^2, {x, a, b}]
```

$$\pi \int_a^b f[x]^2 \, dx$$

```
(* a *)

f[x_] := (x^2 + 3)

a = 0; b = 1;

V
```

$$\frac{56\pi}{5}$$

```
(* b *)

a = 0; b = 10;

f[x_] := x / 5

(* die Rotation dieses Geradenstücks erzeugt den Kegel *)

V
```

$$\frac{40\pi}{3}$$

```
(* 6 *)

Clear[f]

(* uneigentliche Integrale der ersten Art:
   Integrationsgrenze → ∞ *)

(* a *)

f[x_] := x^(-3)

Integrate[f[x], {x, 1, ∞}]
```

$$\frac{1}{2}$$

```
(* b *)

f[x_] := Exp[-x]
```

```
Integrate[f[x], {x, 0, ∞}]
```

1

```
(* c *)

f[x_] := x Exp[-x^2]

Integrate[f[x], {x, 0, ∞}]
```

$\frac{1}{2}$

```
(* uneigentliche Integrale der zweiten Art:
  an der unteren Grenze ist eine Polstelle des Integranden *)

(* d *)

f[x_] := 1 / Sqrt[x ^3]

Integrate[f[x], {x, 0, 1}]
```

Integrate::idiv : Integral of $\frac{1}{x^{3/2}}$ does not converge on {0, 1}. ≫

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx$$

```
(* das uneigentliche Integral existiert also nicht *)

(* 5 *)

f[x_] := 1 / (1 - x)

Integrate[f[x], {x, 1, 5}]
```

Integrate::idiv : Integral of $\frac{1}{1-x}$ does not converge on {1, 5}. ≫

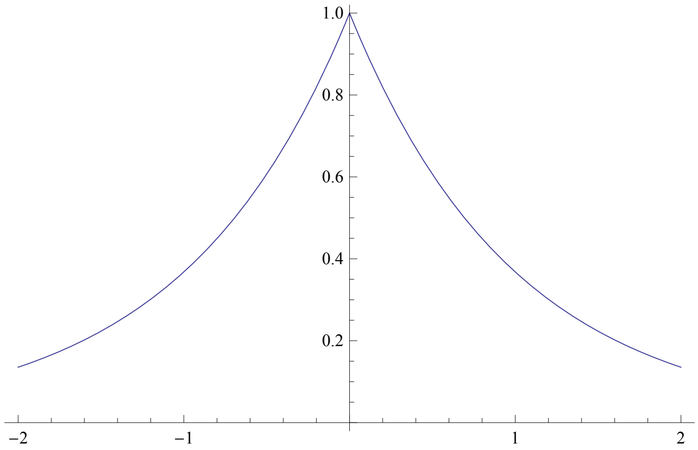
$$\int_1^5 \frac{1}{1-x}\, dx$$

```
(* das uneigentliche Integral existiert also nicht *)


(* eine Ergänzung: *)

f[x_] := 1 / Sqrt[x ]

Integrate[f[x], {x, 0, 1}]
```

2

```
(* das uneigentliche Integral existiert also  *)



(* 7 *)

Remove["Global`*"]

f[x_] := Exp[-Abs[x]]
```

```
Plot[f[t], {t, -2, 2}, AxesOrigin → {0, 0}]
```




```
Integrate[f[x] * Exp[- I * k * x], {x, -∞, ∞}, Assumptions → {x ∈ Reals, k ∈ Reals}]
```

$$\frac{2}{(-i + k)\ (i + k)}$$

```
% // Simplify
```

$$\frac{2}{1 + k^2}$$

```
(* mit dem eingebauten Befehl: *)

F[k_] = FourierTransform[f[x], x, k, FourierParameters → {1, -1}]
```

$$\frac{2}{1 + k^2}$$

```
(* 7 *)

Remove["Global`*"]

f[x_] := Sin[a * x]

(* mit dem eingebauten Befehl: *)

F[k_] = FourierTransform[f[x], x, k, FourierParameters → {1, -1}]
```

$-i\,\pi\,\text{DiracDelta}[a - k] + i\,\pi\,\text{DiracDelta}[a + k]$

```
(* die Fouriertransformierte existiert nur dann,
wenn man eine sehr spezielle Funktion hinzuzieht,
nämlich die Dirac'sche Deltafunktion *)

F[s_] = LaplaceTransform[f[x], x, s]
```

$$\frac{a}{a^2 + s^2}$$