Prof. Dr. Dieter Hackenbracht FH FFM / FB 2

Klausur zu: **Mathematik Vertiefung** 18.7.2013

Dauer: 90 Minuten

Name, Vorname: Matrikelnr:

Erreichte Punktzahl: / / / / Summe:

Note:

In dieser Klausur werden 5 Aufgaben angeboten. **Sie können 50 Punkte (= 100%) mit 4 der 5 Aufgaben erreichen. Die Bearbeitungszeit ist für 4 Aufgaben ausgelegt. Sie müssen eine Aufgabe streichen.**
Für den Schein (mit Note 4.0) sind 25 Punkte erforderlich. Viel Erfolg!

Hilfsmittel: Formelsammlung, 2 selbst beschriebene Blätter, Taschenrechner

Bitte lesen Sie aufmerksam das Folgende:

SIE MÜSSEN AUF JEDEN FALL DAS AUFGABENBLATT WIEDER ABGEBEN.
BITTE JEDE AUFGABE AUF EINEM NEUEN BLATT BEGINNEN !!
SCHREIBEN SIE AUF JEDES BLATT IHREN NAMEN.
Nummerieren Sie die Blätter. Bitte schreiben Sie lesbar und übersichtlich.
Sie dürfen weder Bleistift noch Rotstift verwenden.
Die **Herleitung der Lösung muss erkennbar sein:**
so darf z.B. der Taschenrechner nur zur Ermittlung der numerischen Werte dienen oder im Sinne einer Formelsammlung benutzt werden.

Tipp:
Für exakte Ausdrücke, wie z.B. $\sqrt{3}$, erst am Ende der Rechnung einen numerischen Wert einsetzen, gerundet auf zwei Nachkommastellen.

Bitte ausfüllen:

Mit meiner Unterschrift erkläre ich, dass ich gesundheitlich in der Lage bin, an dieser Klausur teilzunehmen, dass ich diese Klausurarbeit selbständig verfasst und nur die zugelassenen Hilfsmittel verwendet habe. Mir ist bekannt, dass mit dem Erhalt der Aufgabenstellung die Klausur als angetreten gilt und bewertet wird.

Ich habe __________ Lösungs-Blätter abgegeben.

____
(Unterschrift)

Bitte markieren Sie die gestrichene Aufgabe mit einem Kreuz.

1. **(12,5 Punkte)**

Gegeben sind die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}$ in der Gleichung $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{c}$, $\vec{c} = \binom{2}{1}$.

b) Es sei $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Berechnen Sie die **Matrix** $\mathbf{X}$.

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ der Matrix $\mathbf{A}$. Sie müssen dazu die folgende Gleichung nach λ auflösen: $\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = 0$. $\mathbf{E}$ ist die 2x2-Einheitsmatrix.

2. **(12,5 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Ermitteln Sie das **Taylorpolynom** 4. Ordnung (Entwicklungspunkt $x_0 = 0$). Sie können dabei auf eine geeignete Taylorentwicklung in der Formelsammlung zurückgreifen. Welchen Näherungswert liefert dieses Taylorpolynom für $f(1)$?

b) Bestimmen Sie das Integral $\int_0^1 \boldsymbol{x}\, f(x)\, dx$ exakt mit Hilfe einer geeigneten Integrationstechnik.

c) Bestimmen Sie einen Näherungswert für obiges Integral, indem Sie den Integranden durch sein Taylorpolynom 3. Ordnung (Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) ersetzen.
Tipp: Ergebnis von (a) !
Wie kann man diese Approximation verbessern? Begründen Sie Ihre Aussage. Berechnen Sie dann den verbesserten Näherungswert.

3. **(12,5 Punkte)**

Für ein periodisches Signal gelte im Grundintervall $0 < t \leq T$: $f(t) = e^{\mathbf{t}}$ **.** Darüber hinaus ist die Funktion periodisch fortgesetzt. Es sei $T = 1$.

a) Zeichnen Sie die Funktion über zwei Perioden (mit Zahlenangaben an den Achsen).

b) Berechnen Sie den konstanten Term der **Fourier-Reihe** dieser Funktion. Welche Bedeutung hat er? Welchen Wert nimmt die (unendliche) Fourier-Reihe bei $t = 1$ an?

c) Berechnen Sie diejenigen Terme der Fourier-Reihe, die zur ersten Oberschwingung gehören (also zur Schwingung mit der **zweifachen** Grundfrequenz). Schreiben Sie diese Terme vollständig hin.

4. **(12,5 Punkte)**

Wir betrachten das **Kurvenstück**, welches gegeben ist durch $y(x) = 2/3\ x^{\mathbf{3/2}}$, $0 \leq x \leq B$.

a) Welche Gleichung muss B erfüllen, damit die (Bogen-) Länge dieses Kurvenstücks 10 (Längeneinheiten) beträgt?

b) Lösen Sie diese Gleichung exakt.
Lösen Sie dann die Gleichung näherungsweise mit dem **Newton-Verfahren**. Nehmen Sie $B = B_0 = 3$ als Startwert. Berechnen Sie den ersten Näherungswert B_1 .

c) Sei $B = 1$. Lässt man dieses Kurvenstück um die x-Achse rotieren, entsteht die Oberfläche eines (Rotations-) Körpers. Berechnen Sie dessen Volumen.

5. **(12,5 Punkte)**

a) Berechnen Sie das folgende **Doppelintegral**: $\int_0^1 \int_0^x (x^3 - 2\,x\,y)\,dy\,dx$.

b) Zeichnen Sie den Integrationsbereich. Wie lautet die Darstellung des obigen Integrals, wenn die Integrationsreihenfolge vertauscht wird?

c) Wo hat der Integrand einen **kritischen Punkt**? Wie lässt sich hier der Typ des kritischen Punktes einfach (und anschaulich) ermitteln?