FH FFM / FB 2
Prof. Dr. D. Hackenbracht

Übungen zur Mathematik 2
Blatt 2

Teil 1

1. [MAT1] Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Berechnen Sie $-2A$, $A - B$, $A \cdot B$ sowie $B \cdot A$.

2. [MAT4] Die Leitwertmatrix eines Vierpols sei $Y = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$. i : imaginäre Einheit !

a)
Bestimmen Sie die Widerstandsmatrix Z und die Kettenmatrix K.
Definitionen: $(i_1, i_2) = Y(u_1, u_2)$, $Z = Y^{-1}$, $(u_1, i_1) = K(u_2, i_2)$.
u_1 , u_2 , i_1 , i_2 sind die Spannungen bzw. die Ströme. Alle Vektoren (.. , ..) sind als Spaltenvektoren aufzufassen.
b)
Zwei gleiche Vierpole werden in Serie verbunden. Für den zweiten Vierpol gilt also:
$(u_2, i_2) = K(u_3, i_3)$. Wie lautet dann der Zusammenhang zwischen (u_1, i_1) und (u_3, i_3) ?

3. [MAT6]
Wenn man in einem zweidimensionalen Koordinatensystem einen Punkt $P = (x, y)$ an der Winkelhalbierenden (des ersten und dritten Quadranten) spiegelt, erhält man einen neuen Punkt $P_M = (x_M, y_M)$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten von P_M .
b) Stellen Sie die Transformation $\vec{x} = (x, y) \rightarrow \vec{x}_M = (x_M, y_M)$ mit Hilfe einer Matrix dar: $\vec{x}_M = SP \cdot \vec{x}$; SP ist eine 2 x 2 – Matrix, die Vektoren sind jetzt als Spaltenvektoren aufzufassen.
Tipp:
Fassen Sie das Ergebnis von (a) als Funktion auf zwischen den „unabhängigen“ Variablen x , y und den „abhängigen“ Variablen x_M , y_M , d.h. stellen Sie x_M als Funktion von x <u>und</u> y dar , ebenso y_M . Die so gewonnenen Gleichungen kann man kompakt mit Hilfe einer Matrix schreiben.
c) Welche Punkte bleiben unverändert, also $\vec{x}_M = \vec{x}$? Und für welche Punkte gilt: $\vec{x}_M = -\vec{x}$?

Teil 2

4. [MAT2]

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Inversen der Koeffizientenmatrix:

$$3x + y = 2$$
$$-x + 2y = 1 \quad .$$

5. [MAT5]

a) Sei $A(s) = \begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Für welche Werte von s ist A nicht invertierbar?
Bestimmen Sie für alle anderen s die Inverse.

b) Sei s = 2 . Bestimmen Sie den Vektor $\vec{y} = A\,\vec{x}$ für $\vec{x} = (1, 2)$ bzw. $\vec{x} = (0, -1)$.
Alle Vektoren sind als Spaltenvektoren aufzufassen.

c) Sei s = 1 . Lösen Sie das lineare Gleichungssystem: $A\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

6. [MAT7]

Wenn man ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem um die z – Achse dreht, ändern sich die Koordinaten eines Punktes (x, y, z) zu (x’, y’, z’) . Dies nennt man eine <u>passive</u> Drehung.

a) Stellen Sie x’ als Funktion von x <u>und</u> y dar , ebenso y’ . Der Drehwinkel sei α .
Die z - Koordinate bleibt bei dieser Drehung erhalten: z’ = z .

Tipp:
Stellen Sie die alten Koordinaten x und y in Polarkoordinaten dar. Nennen Sie den entsprechenden Winkel φ . Wie müssen dann die neuen Koordinaten x’ und y’ in Polarkoordinaten aussehen?

b) Stellen Sie die Transformation $\vec{x} = (x, y, z) \rightarrow \vec{x}' = (x', y', z')$ mit Hilfe einer Matrix dar: $\vec{x}' = D\,\vec{x}$; D ist eine 3 x 3 – Matrix ; die Vektoren sind als Spaltenvektoren aufzufassen. Tipp: das Ergebnis von (a) kompakt mit Hilfe einer Matrix schreiben.

c) Wie muss aus geometrischen Gründen die inverse Matrix D^{-1} aussehen?

d) Wie sieht die Matrix für eine „aktive“ Drehung um den Winkel β aus, d.h. wenn der geometrische Punkt tatsächlich bewegt wird ?
Tipp: Durch welche passive Drehung kann man die neue Lage erreichen ?

Teil 3

7. [MAT3] Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sowie der Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Determinante von A.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Verfahrens die Inverse von A .

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der adjungierten Matrix die Inverse von A .

d) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\,\vec{x} = \vec{c}$, $\vec{x}^{\,t} = (x, y, z)$

- mit Hilfe der Inversen von A
- mit Hilfe der Cramer'schen Regel.

8. [MAT9]

a) Bestimmen Sie für die Matrix **SP** aus Aufgabe [MAT6] die Eigenwerte.

b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenvektor (der noch einen offenen Faktor enthält!). Legen Sie den noch offenen Faktor fest, in dem Sie die Eigenvektoren dann auf Eins normieren, also den jeweiligen Einheits-Eigenvektor (EEV) $\overrightarrow{u_k}$ ermitteln.
Wählen Sie die Orientierung und Reihenfolge (Nummerierung) so, dass die beiden EEV ein Rechtssystem bilden.

c) Betrachten Sie die Matrix **D**, deren Zeilen diese EEV sind. Zeigen Sie
i) det(D) = 1 ; ii) $D^{-1} = D^{t}$; iii) $D \cdot \mathbf{SP} \cdot D^{-1}$ ist eine Diagonalmatrix.

d) Die Bestimmung von SP erfolgte in einem gegebenen kartesisches Koordinatensystem **S**.
Die oben gewählten EEV spannen ein neues kartesisches Koordinatensystem **S'** auf, welches aus **S** durch eine Drehung hervorgeht (vergleiche [MAT3]). **D** ist die zugehörige Drehmatrix. Um welchen Winkel wird gedreht?

9. [MAT11]

In einem gegebenen kartesisches Koordinatensystem **S** habe ein Tensor **T** (z.B. ein Spannungstensor) die folgende Gestalt:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von **T** .

b) Die Eigenvektoren sind $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 1\right)$, $(-2,1,0)$.

Welcher Eigenwert gehört jeweils dazu?

c) Bilden Sie wieder die Matrix **D** (s. [MAT9]) .

Zeigen Sie i) det(D) = 1 ; ii) $D^{-1} = D^{t}$; iii) $D \cdot \mathbf{T} \cdot D^{-1}$ ist eine Diagonalmatrix.