FH FFM / FB 2
Prof. Dr. D. Hackenbracht

Übungen zur Mathematik 2

Blatt 3

1. [TR1]
   a) Bestimmen Sie für die Funktionen cos(x) , sin(x) und e^x jeweils die Taylorpolynom 4. , 6. und 8. Grades für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

   b) Bestimmen Sie für f(x) = cos(x) das Taylorpolynom 5.,6., und 7. Grades für den Entwicklungspunkt $x_0 = \pi/2$. Wie groß ist der Fehler bei x = 1 (Abschätzung des Restgliedes) ?

2. [TR2] Entwickeln Sie f(x) = ln (1+x) um $x_0 = 0$. Wie hoch muß der Grad des Taylor - polynoms sein, damit für $0 \leq x \leq 0.5$ der Fehler (also $|R_n|$) kleiner als 0.001 bleibt ?
   Hinweis: Schreiben Sie das Restglied in der angegebenen Form auf. Führen Sie dann eine "worst case"- Betrachtung durch, um den Fehler abzuschätzen. Beispiel für eine solche Betrachtung: $1/(1+x) \leq 1$ für alle $x \geq 0$ (größer wird der Bruch auf keinen Fall).

Sie können bei den restlichen Aufgaben da, wo es möglich ist, auf tabellierten Taylorentwicklungen zurückgreifen.

3. [TR3]
a) Bestimmen Sie $\sqrt{17}$ näherungsweise durch eine Taylorentwicklung bis zur 2. Ordnung. Tip : 17 = 16 + 1 . Wieviele Stellen des Ergebnisses sind dann signifikant? Überprüfen Sie dies hier durch Übergang zu höheren Ordnungen.
b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

4. [TR4] Der für die Relativitätstheorie typische Korrekturfaktor für bewegte Körper lautet:
   $\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, v ist die Geschwindigkeit des Körpers, c die Lichtgeschwindigkeit.
   So gilt z.B. für die Masse eines sich bewegenden Körpers: $m = \gamma\ m_0$, m_0 ist die Ruhemasse (Masse des Körpers für v = 0). Geben Sie für die Energie dieses Körpers die Taylorentwicklung um v = 0 an (bis zum dritten, nicht verschwindenden Term). Es gilt: $E = m c^2$.

5. [TR5]
a) Bestimmen Sie näherungsweise den Schnittpunkt der Funktionen $f(x) = e^{-(x+1)}$ und $g(x) = \ln(x+1)$, in dem Sie beide Funktionen durch das jeweilige Taylorpolynom 2. Ordnung (Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) ersetzen.
b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

6. [TR6] Auch die komplexe e-Funktion $f(z) = e^z$ ($z \in \mathbf{C}$) kann man um $z_0 = 0$ in eine Taylorreihe entwickeln: man muss nur in der Taylorreihe für die reelle Funktion $f(x) = e^x$ das reelle Argument x durch das komplexe z ersetzen. Setzen Sie anschließend $z = i\varphi$ (i : imaginäre Einheit) und beweisen Sie damit die Euler'sche Formel. Sie können voraussetzen, dass Umsortieren in dieser Reihe erlaubt ist.

7. [TR7]

a) Wie lautet die Taylorentwicklung für $f(x) = e^{-3x}$ um $x_0 = 0$?

b) Gesucht ist $\int_0^1 \sin(t^2)\,dt$. Das Integral lässt sich nicht exakt berechnen. Eine Möglichkeit, einen Näherungswert zu erhalten, besteht darin, den Integranden durch ein Taylorpolynom (um $t = 0$) zu approximieren. Welche Ordnung muss man mindestens berücksichtigen, damit man drei Stellen im Ergebnis garantieren kann?

Alternative: numerische Integration