FH FFM / FB 2
Prof. Dr. D. Hackenbracht

Übungen zur Mathematik 2

Blatt 4

1. [Fou1] Für die folgenden Funktionen soll eine Fourier-Analyse durchgeführt werden. Angegeben ist jeweils ein Grundintervall (mit der Länge einer Periode). Darüber hinaus ist die Funktion periodisch fortgesetzt.

   Bestimmen Sie zunächst das konstante Glied sowie die Fourier-Komponenten der Grundschwingung und der ersten Oberschwingung. Bestimmen Sie dann allgemein die Fourier-Reihe. Bestimmen Sie auch das Spektrum von f .

   Hinweis : Nutzen Sie, wenn möglich, die Symmetrie der Funktion.

   a) $$f(t) = \begin{cases} 4 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{für } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

   b) $$f(x) = \begin{cases} -x-\pi & \text{für } -\pi \leq x \leq -\pi/2 \\ x & \text{für } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ -x+\pi & \text{für } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

   c) $f(t) = |\sin(t)|$ für $0 \leq t \leq \pi$

   Bem.: Ein Computeralgebra-System kann hier sehr hilfreich sein.

2. [Fou2] Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der folgenden Funktion:

   $y = f(x) = x$ für $-1 \leq x \leq 1$.

   Angegeben ist das Grundintervall. Darüber hinaus ist die Funktion periodisch fortgesetzt.

   Hinweis: in der Vorlesung haben wir bereits eine ähnliche Funktion behandelt, nämlich $z = g(t) = t$ für $-\pi \leq t \leq \pi$ (Grundintervall) . Die Fourier-Reihe dieser Funktion lautet:

   $$g(t) = 2\left\{ \frac{\sin(t)}{1} - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} - \dots \right\}.$$

   Lösen Sie die Aufgabe durch Anpassen der Skala (Änderung des Maßstabs), d.h. substituieren Sie $t = \alpha x$. Der Faktor α ergibt sich durch Vergleich.

3. [Fou3 /FT1]
Wir betrachten die Funktion $f(t) = f_0$ (also konstant) für $-T/2 \le t \le T/2$, außerhalb dieses Intervalls ist die Funktion Null ! Sie stellt ein zeitlich begrenztes Signal dar (ein einzelner Rechtecks-Impuls) , T ist die Dauer des Impulses . Die Funktion ist also **nicht** periodisch ! Sie hat daher auch keine Fourier-Reihe.
Dennoch kann man das Spektrum dieser Funktion ermitteln, und zwar mit Hilfe der sog. **Fourier-Transformation**. Dazu berechnet man die **Fourier-Transformierte**

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \qquad (\text{ i : imaginäre Einheit }) \quad .$$

$F(\omega)$ ist für alle Frequenzen definiert: das Spektrum ist **kontinuierlich**.
$F(\omega)$ ist i.a. eine komplexe Größe: ihr Betrag heißt Amplituden-Spektrum des Signals f(t), ihr Argument (also der Winkel in der Polardarstellung) heißt Phasen-Spektrum.

Bestimmen Sie diese Spektren. Zeichnen Sie das Amplitudenspektrum. Wie verändert sich dieses, wenn man die Zeitdauer T des Signals vergrößert bzw. verkleinert ? Betrachten Sie insbesondere den dominanten Beitrag im Spektrum um $\omega = 0$, d.h. $\omega_{-1} \le \omega \le \omega_1$, wobei ω_{-1} *bzw.* ω_1 die beiden ersten Nullstellen um $\omega = 0$ sind. Berechnen Sie das Produkt „Höhe * Breite“ , Höhe = F(0) , Breite = $\omega_1 - \omega_{-1}$.

Bestimmen Sie im Amplitudenspektrum näherungsweise die Fläche zwischen $\omega_{-1} \le \omega \le \omega_1$. Exakt lässt sich diese Fläche hier nicht berechnen. Tipp: Taylorentwicklung des Integranden; die ersten beiden von Null verschiedenen Terme reichen.