

Übungen zur Mathematik 2

Blatt 5

1. [ADI6] Berechnen Sie die Länge folgender Kurven (**Bogenlänge**):

- a) Parabel $y = x^2/2$ für $-1 \leq x \leq 1$ b) Kettenlinie $y = \cosh(x)$ für $-1 \leq x \leq 1$.
c) $\underline{r}(t) = (t^2, t^3/3)$ für $0 \leq t \leq T$ d) $\underline{r}(t) = (2e^{t^2}, 3e^{t^2})$ für $0 \leq t \leq T$.

2. [ADI7] Die Archimedische Spirale ist in Polarkoordinaten gegeben durch $r = a \varphi$,
 a ist konstant. Berechnen Sie die Länge der Kurve für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Tipp: x und y auf dieser Kurve in Polarkoordinaten darstellen (φ wird zum Parameter).

Anwendung: Länge der Rille einer Schallplatte.

3. [ADI16]

Die Berechnung der Bogenlänge einer durch $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, beschriebenen Kurve erfordert die Integration von $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Diese Integrale sind im allgemeinen nicht analytisch lösbar.

Bestimmen Sie durch eine geeignete Taylorentwicklung des Integranden die Länge der Kurve, die durch den Graphen von $f(x) = x^3$, $0 \leq x \leq 1/2$, gegeben ist. Hinweis: Statt das Taylorpolynom von Hand auszurechnen, können Sie eine geeignete Formel aus der Formelsammlung benutzen – zusammen mit dem Ersetzungs- Kunstgriff („Taylor-Trick“).

4. [ADI14]

Bestimmen Sie das Volumen der folgenden Körper durch Integration (Sie können die Formel für **Rotationskörper** benutzen):

a) der Körper entsteht durch Rotation des Parabelstücks $z = x^2 + 3$, $0 \leq x \leq 1$ um die x -Achse.

b) gerader Kreiskegel, Höhe 10, Radius 2.

5. [ADI8] Für welche α existieren die folgenden Grenzwerte?

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b x^\alpha dx \quad (a > 0) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^b x^\alpha dx \quad (\alpha < 0, b > 0)$$

Wenn sie existieren, nennt man sie **uneigentliche Integrale** (der 1. bzw. 2. Art).

6. [ADI9] Berechnen Sie die folgenden **uneigentlichen Integrale**, sofern sie existieren.

$$\text{a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} \quad \text{b) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x} \quad \text{c) } \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx \quad \text{d) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3}} \quad \text{e) } \int_1^5 \frac{dx}{1-x}$$

7. [ADI10] Berechnen Sie die **Fouriertransformierte** $F(k)$ von $f(x) = e^{-|x|}$. Es gilt:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i k x} dx \quad (i: \text{ imaginäre Einheit, } k \text{ ist reell}).$$

8. [ADI13] Bestimmen Sie die **Laplace-transformierte** $F(s)$ von $f(x) = \sin(ax)$. Es gilt:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-s x} dx.$$

s kann komplex sein. Überzeugen Sie sich davon, dass die Laplace-transformierte existiert, wenn der Realteil von s positiv ist. Existiert die Fouriertransformierte von $f(x)$?

9. [ADI11]

In der Statistik (z.B. bei der Untersuchung der Lebensdauer von Bauteilen) benötigt man die **Gauß'sche Normalverteilung** $N(\mu, \sigma^2)$. Sie wird beschrieben durch die sog. Verteilungsfunktion

$$F(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt; \text{ die Dichtefunktion } \varphi(t) \text{ ist gegeben durch } e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)}.$$

Tabelliert ist die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ zur Gauß'schen **Standard**-Normalverteilung $N(0,1)$.

Wie kann man $F(x; \mu, \sigma^2)$ aus $\Phi(x)$ erhalten?

10. [ADI14a]

Ein metallisches Gehäuse habe die Form eines Oktaeders (Kantenlänge des Quadrates sei $2a$).

- Berechnen Sie sein Volumen mit Hilfe der Integralrechnung.
- Bestimmen Sie die größtmögliche Kugel, die in das Gehäuse reinpasst, wenn ein Sicherheitsabstand von $a/10$ eingehalten werden muss.

11. [ADI12]

Eine Leistungskurve $P = P(t)$ sei durch einen Strecken-Zug darstellbar:

linearer Anstieg von $P = 0$ auf $P = P_{\max}$ ($0 < t < t_1$), Plateau $P = P_{\max}$ ($t_1 < t < t_1 + T$),

linearer Abfall auf 0 ($t_1 + T < t < T + 2 t_1$). Die insgesamt zugeführte Energie sei E .

$P_{\max}$ sei vorgegeben („Leistungsbegrenzung“) sowie die Anstiegsdauer t_1 . Bestimmen Sie T .

12. [ADI-DGL]

Lösen Sie die folgenden **Differentialgleichungen**; $y = y(x)$, y' ist die erste Ableitung.

- $y' + 3y = 5$
- $y' + xy = 0$
- $y' + 2y = x$
- $y' = 2x\sqrt{y}$