

Übungen zur Mathematik 2

Blatt 7

1. [3D6] Bestimmen Sie den Gradienten und das vollständige Differential der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 \sin(x_2) + x_3 \ln(x_4) \quad \text{allgemein und im Punkt } P = (1, 0, 1, 2).$$

2. [3D6a] Wir untersuchen die Funktion  $f(x, y) = \cos(y) / x + x^3$ .

$P = (1, \pi/2)$  ist ein willkürlich gewählter Punkt in der  $xy$ -Ebene.

a)

Bestimmen Sie den Gradienten und das vollständige Differential der Funktion im Punkt  $P$ .

b)

Ermitteln Sie die Richtungsableitung der Funktion in die durch  $\overrightarrow{PQ}$  gegebene Richtung;  $Q = (0, \pi/4)$ .

c)

Geben Sie die Taylorentwicklung 2. Ordnung um  $P$  an. Wie sieht die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen im Punkt  $P$  in vektorieller Form aus?

Bestimmen Sie auch die Hesse-Matrix.

d)

Wie ändert sich der Funktionswert, wenn man von  $P$  weiter geht zum Punkt  $Q = (0.9, 1.7)$ ? Approximieren Sie die Veränderung linear und vergleichen Sie diese mit der tatsächlichen Änderung.

e)

Von  $P$  geht man weiter zum Punkt  $Q = (1.03, \pi/2 + \Delta y)$ . Wie muss man  $\Delta y$  wählen, damit  $\overrightarrow{PQ}$  in die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion zeigt?

3. [ADI4]

Es sollen Volumen  $V$  und Oberfläche  $O$  einer Kugel durch das Ausmessen des Durchmessers  $D$  ermittelt werden. Dessen Mittelwert sei  $\overline{D}$ , die Meßungenauigkeit („der Fehler“)  $\Delta D$ . Mit welcher Ungenauigkeit sind dann die berechneten Größen  $V$  und  $O$  behaftet? Dazu müssen Sie das Differential dieser Größen bilden!

4. [3D7]

Der Gesamtwiderstand  $R$  zweier parallel geschalteter Ohm'scher Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  ist gegeben durch  $R = (R_1 R_2) / (R_1 + R_2)$ .

a)

Sei  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 400 \Omega$ . Wie ändert sich  $R$  näherungsweise, wenn man die Einzelwiderstände um  $\Delta R_1$  bzw.  $\Delta R_2$  ändert?

b)

Fassen Sie die obigen Angaben als Mittelwerte bzw. Mess-Ungenauigkeiten auf und bestimmen Sie die maximale Ungenauigkeit von  $R$ . Dazu müssen Sie den Betrag des vollständigen Differentials von  $R$  abschätzen. Sie müssen dazu ggf. die Dreiecks-Ungleichung:  $|a + b| \leq |a| + |b|$  benutzen.

5. [3D7a]

Die Gleichung für ein ideales Gas verknüpft den Druck  $p$ , das Volumen  $V$  und die (absolute) Temperatur  $T$ :  $p V = R T$ ;  $R$  ist die Gaskonstante. Lösen Sie diese Gleichung nach jeweils einer Größe auf und bestimmen Sie deren vollständiges Differential.

Fassen Sie die Größen auf der rechten Seite der jeweiligen Gleichung wieder als Mittelwerte und die unabhängigen Differentiale (die „ $\Delta s$ “) als Mess-Ungenauigkeiten auf und bestimmen Sie die maximale Ungenauigkeit der berechneten Größe (auf der linken Seite der Gleichung). Dazu müssen Sie den Betrag des vollständigen Differentials von  $R$  abschätzen. Sie müssen dazu ggf. die Dreiecks-Ungleichung:  $|a + b| \leq |a| + |b|$  benutzen.