FH FFM / FB 2
Prof. Dr. D. Hackenbracht

Übungen zu : Differentialgleichungen
Blatt 1

Hinweis: in physikalisch-technischen Problemen wird die Ableitung nach der Zeit mit einem Punkt gekennzeichnet; Bspl.: $\dot{x}$ ist die Ableitung von x nach t

1. [DGL1_1] Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen (DGL):
   a) $y''(x) = 0$ b) $y''(x) = \sin(x)$.
   Welche spezielle Lösung erfüllt jeweils die Anfangsbedingungen: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$?

2. [DGL1_2a]
   Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für ein Elektron (Ladung q, Masse m) im konstanten elektrischen Feld E . Nach geeigneter Wahl des Koordinatensystems gelte:
   $m\ddot{x} = qE,\;\; m\ddot{y} = 0,\;\; m\ddot{z} = 0$. Die gesuchten Ortskoordinaten x, y, z hängen von der Zeit t ab; $\dot{x}$ ist die Ableitung von x nach t (also die Geschwindigkeit in x-Richtung), etc .
   Die Anfangsbedingungen lauten: $x(0) = y(0) = z(0) = 0;\;\; \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0,\;\; \dot{z}(0) = 2$; das Elektron befindet sich also anfänglich (zur Zeit t = 0) im Ursprung des gewählten Koordinatensystems und hat eine Anfangsgeschwindigkeit in positiver z-Richtung.

3. [DGL1_3] Zeigen Sie durch Einsetzen, dass $x(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)$ die DGL $\ddot{x} + x = 0$ löst. Lösen Sie dann die folgenden Randwertprobleme:

   a) $x(0) = 1$, $x(\pi/2) = 0$
   b) $x(0) = 1$, $x(\pi) = 0$
   c) $x(0) = 1$, $x(\pi) = -1$

4. [DGL1_3a]
   Zeigen Sie, dass $x(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$ die DGL für ein Federpendel, also
   $\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0$, löst, wenn ω einen bestimmten Wert hat.

5. [DGL1_4] [Preuß 2, S. 313] Die Biegelinie y(x) eines beidseitig starr eingespannten Stabes mit der konstanten Biegesteifigkeit α , der Länge l und mit der Linienbelastung f(x) ergibt sich als Lösung der Randwertaufgabe

   $y^{(4)}(x) = f(x)/\alpha \;\; (0 \le x \le l)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(l) = 0$, $y'(l) = 0$.

   Bestimmen Sie y(x), wenn $f(x) = b\,x / l$.

6. [DGL1_5a] Das Wachstum einer Population $p = p(t)$ werde durch das Gesetz von Malthus beschrieben. Es gilt also: $\dot{p} = k\,p \;\; (k > 0)$. Bestimmen Sie p(t).
   Es sei $p(0) = 1000$ und $k = 0.05$. Wie groß sind dann p(10), p(20), p(100) ?