

Übungen zu : Differentialgleichungen
Blatt 2

1. [DGL2_1] Der radioaktive Zerfall gehorcht der DGL $\dot{n} = -\lambda n$: $n = n(t)$ ist die Zahl der Atomkerne zur Zeit t , λ die positive Zerfallskonstante. Radioaktive Abfälle werden in Behältern aus rostfreiem Stahl oder Beton eingelagert. Nach Meinung von Experten sollen diese Behälter intakt bleiben, bis 99.99% des Materials zerfallen ist. Welche Lebensdauer muss ein Behälter aufweisen, wenn Pu-239 mit einer Halbwertszeit von 24360 Jahren eingelagert wird ?

2. [DGL2_1a]

Die lineare **inhomogene** DGL 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstanter Inhomogenität $R(x) = r = \text{const.}$ kann man auf eine homogene DGL zurückführen:

$$(*) \quad y'(x) + a y(x) = r \Rightarrow y' + a y - r = 0 \Rightarrow y' + a (y - r/a) = 0 .$$

a) Substituiere $z(x) = y(x) - r/a$; wegen $z' = y'$ erhält man die neue DGL für z : $z' + a z = 0$.
Lösen Sie damit die Ausgangs-DGL (*).

b) Untersuchen Sie dann die folgenden Anwendungsbeispiele:

i) eindimensionale Bewegung mit geschwindigkeitsabhängiger Reibung $m \dot{v}(t) = -k v(t) + F$

ii) elektrotechnisches RC-Glied : $R C \dot{U}_C + U_C = U_0, U_C = U_C(t)$

3. [DGL2_2] Lösen Sie jeweils das AWP:

a) $y' - (1/x) y = 0, y(1) = 1$

b) $x y' - 2 y = 0, y(1) = 1$

c) $y' + (\tan x) y = 0, y(0) = 2$

4. [DGL2_2a] Wir untersuchen das Wachstum einer Population p mit einer zeitlich veränderlicher Wachstums“konstanten“. Die DGL laute:

$$\dot{p}(t) = \frac{2}{1 + 0.1 t} p(t), \quad p(0) = 1000 .$$