FH FFM / FB 2
Prof. Dr. D. Hackenbracht

Übungen zur Mathematik 2
Wiederholung

Gleichungssysteme und Matrizen

1. [LGS5]
Für ein lineares Gleichungssystem **A** $\vec{x}$ = $\vec{c}$ mit den Unbekannten $\vec{x}$ = (x , y , z) wurde das **<u>erweiterte</u>** Schema (**A** | $\vec{c}$) aufgestellt und die Koeffizientenmatrix **A** durch Umformungen bereits in die obere Dreiecksform gebracht: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & | & 3 \\ 0 & 5 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3 & | & 6 \end{pmatrix}$

Stellen Sie das dazugehörige gestaffelte Gleichungssystem auf und lösen Sie es durch sukzessives Einsetzen.

2. [MAT9]
a) Zwischen den zweikomponentigen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bestehen die Beziehungen

$\vec{a} = \mathbf{Z}\,\vec{b}$ bzw. $\vec{c} = \mathbf{Y}\,\vec{b}$. Es sei $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Welche Beziehung besteht dann zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$?

b) Gegeben sind die Matrizen $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -4 & a \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie a und b

so, dass **Y Z** = **Z Y** .

3. [MAT8]
Untersucht wird ein System mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen. Zwischen den Ausgangsgrößen x_2 und y_2 sowie den Eingangsgrößen x_1 und y_1 besteht der folgende (lineare) Zusammenhang:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad , \; A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad .$$

a) Bestimmen Sie die Ausgangsgrößen, wenn am Eingang $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ anliegt.

b) Am Ausgang wird $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ gemessen. Welche Werte haben dann die Eingangsgrößen ? Versuchen Sie verschiedene Lösungswege.

Taylorentwicklung

1. [TR8]

a) Bestimmen Sie (möglichst einfach) das Taylorpolynom 9. Grades von $f(x) = e^{-x^3}$, $x_0 = 0$.

b) Bestimmen Sie $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ mit Hilfe einer geeigneten Taylorentwicklung.

2. [TR9] Gesucht ist der Schnittpunkt mit $x > 0$ zwischen x^3 und $\sin(x)$.

a) Lösen Sie diese Aufgabe näherungsweise durch eine geeignete Taylorentwicklung.

b) Lösen Sie diese Aufgabe mit dem **Newton-Verfahren**: nehmen Sie die Lösung von (a) als Startwert und berechnen Sie die nächste Näherungslösung.

Fourier-Entwicklung

1. [Fou4]
Gegeben ist ein Sinus-Signal, das durch einen Einweg-Gleichrichter gegangen ist.
Im Grundintervall $0 < t < 2\pi$ gilt also :

$$f(t) = \begin{cases} 3\sin(t) & \text{für } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{für } \pi < t < 2\pi \end{cases} .$$

Darüber hinaus ist die Funktion **periodisch fortgesetzt**.

Bestimmen Sie die Fourier-Entwicklung für dieses Signal. Bestimmen Sie zumindest die ersten drei Terme, die in dieser Entwicklung vorhanden sind.
Bestimmen Sie auch das (diskrete) Amplitudenspektrum.

Weitere Anwendungen der Integralrechnung (s. a. Ü 5)

1. [ADI 16b]
Welche Gleichung muss T erfüllen, damit die Länge des durch $x = 3t$, $y = 5t^2$, $0 < t < T$ gegebenen Kurvenstücks 10 (Längeneinheiten) beträgt ?

2. [ ]
Integrieren Sie „zu Fuß“: a) $x^2 \cos(x^3)$; b) $e^x \sin(1+ e^x)$

Mehrdimensionale Analysis

1. [3I2a]
Bestimmen Sie das Volumen des Körpers K(A; f), der begrenzt wird durch die Fläche $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ und die Grundfläche A: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x^2$.

2. [3D7a]
Sei $f(x, y) = x^3 + y + \sin(x y)$.

a) Bestimmen Sie das **vollständige Differential** df $= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$; die partiellen Ableitungen sind bei (x_0 , y_0) auszuwerten.
Bestimmen Sie Δf und df für $(x_0 , y_0) = (2, \pi)$ und $\Delta x = -0.1$, $\Delta y = 0.3$.

Hinweis:
Das vollständige Differential df approximiert die tatsächliche Veränderung der Funktion (also Δf), wenn sich die Argumente x und y , ausgehend von den Werten x_0 bzw. y_0 , um Δx bzw. Δy ändern. Der Ausdruck $f(x_0 , y_0) + df$ stellt die **lineare Approximation** für **f** $(x_0 + \Delta x , y_0 + \Delta y)$ dar; man sagt: f (x,y) wurde um (x_0 , y_0) linearisiert . Graphisch: Approximation durch die **Tangentialebene** an den Punkt (x_0 , y_0 , z_0) mit $z_0 = f(x_0 , y_0)$.

b) Fasst man x und y als **Messgrößen** auf , die mit der jeweiligen Ungenauigkeit Δx bzw. Δy bestimmt werden, so ergibt sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß für die Ungenauigkeit der berechneten Größe f(x, y) :

$\Delta f_{\text{Gauß}} = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x)^2 + (\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y)^2}$. Bestimmen Sie $\Delta f_{\text{Gauß}}$ für $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.3$.

Die partiellen Ableitungen werden bei den Mittelwerten $\bar{x}$ und $\bar{y}$ der Messgrößen ausgewertet: es sei $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = \pi$. Bestimmen Sie auch den Mittelwert der berechneten Größe, d.h. $\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y})$. Das Ergebnis der Untersuchung lautet dann: $f = \bar{f} \pm \Delta f_{\text{Gauß}}$

3. [3D]
Sei $f(x, y) = (x+1)^3 + (y-2)^2$.

a) Bestimmen Sie die Höhenlinien der Funktion.

b) Gibt es kritische Punkte, und wenn ja, wo und welchen Typs?