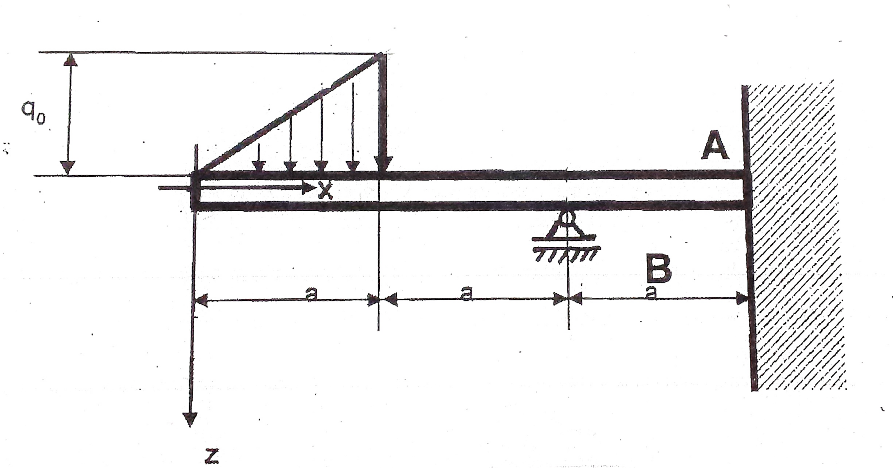
TM-II: Klausuraufgabe 2/2012

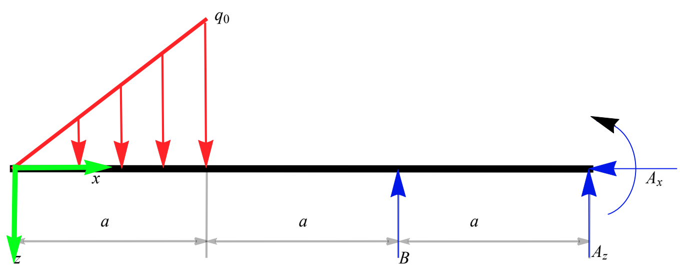
Belasteter, gelagerter Balken

I) Aufgabenstellung



- Gegeben:
  - Linienlast: q_0
  - Biegesteifigkeit: EI = const.
  - Länge: a
- Aufgaben:
  - a) Bestimmen Sie die Gleichung der Biegelinie $w(x)$.
  - b) Berechnen Sie die Durchbiegung am freien Balkenende ($w(x=0)$).
  - c) Skizzieren Sie qualitativ die Verläufe der Querkraft $Q(x)$ und das Schnittmoment $M(x)$.
  - d) Bestimmen Sie die Stelle ($x = x^*$) an der das betragsmäßig größte Schnittmoment auftritt.
  - e) Zusatz: Verlauf der Biegelinie $w(x)$.

II) Freikörperbild



III) Vorarbeit

Am freien Ende gibt es keine Querkraft und Momente die auf den Balken einwirken, jedoch wirkt hier eine linear ansteigende Streckenlast mit der Länge a und der Höhe q_0.
Da der Balken auf der rechten Seite eingespannt ist, wirkt dort keine Durchbiegung und Neigung.
Aufgrund der nicht vorhandenen Längskraft nimmt der Lageranteil A_x keine Kraft auf.
Durch das Föppel-Symbol ist die Betrachtung des Lageranteils A_z nicht notwendig und trägt somit nicht zur Lösung bei.
Am Lager B ist die Durchbiegung und das Moment gleich null. Daher müssen fünf Unbekannte berechnet werden.
Die Streckenlast wird zuerst durch einen linearen Anstieg beschrieben und anschließend nach der Länge a durch den gleichen, aber negativen, Anstieg angeglichen. Nach entfernen des Offsets der Höhe q_0 ist die Streckenlast vollständig mathematisch definiert.
Zum Aufgabenteil d): Die Nullstellen der Ableitung des Schnittmomentes ergeben die Stellen der betragsmäßig größten auftretenden Schnittmomente.

IV) Lösung

```
Remove["Global`*"]
```

Aufgabenteil a)

Aufstellen der Streckenlastfunktion

```
q[x_] := q0 / a * x - q0 / a * (x - a) * UnitStep[x - a] - q0 * (x - a) ^ 0 * UnitStep[x - a]
```

Integration zur Querkraftfunktion Q(x)

```
Q[x_] = - (Integrate[q[x], x]) + B * (x - 2 * a) ^ 0 * UnitStep[x - 2 * a] + c1
```

$$c1 - \frac{q0\ x^2}{2\ a} + B\ \text{UnitStep}[-2\ a + x] - \left(\frac{a\ q0}{2} - \frac{q0\ x^2}{2\ a}\right) \text{UnitStep}[-a + x]$$

Integration zur Momentenfunktion M(x)

```
M[x_] = Integrate[Q[x], x] + c2
```

$$c2 + \frac{1}{6\ a}\left(6\ a\ c1\ x - q0\ x^3 + 6\ a\ B\ (-2\ a + x)\ \text{UnitStep}[-2\ a + x] + q0\ (a - x)^2\ (2\ a + x)\ \text{UnitStep}[-a + x]\right)$$

Integration zur Neigung w'(x)

```
w'[x_] = - (Integrate[M[x], x]) + c3
```

$$c3 - \frac{1}{24\ a}\left(x\ \left(24\ a\ c2 + 12\ a\ c1\ x - q0\ x^3\right) + 12\ a\ B\ (-2\ a + x)^2\ \text{UnitStep}[-2\ a + x] - q0\ (a - x)^3\ (3\ a + x)\ \text{UnitStep}[-a + x]\right)$$

Integration zur Biegelinie w(x)

```
w[x_] = Integrate[w'[x], x] + c4
```

$$c4 + c3\,x + \frac{1}{24\,a}\left(-12\,a\,c2\,x^2 - 4\,a\,c1\,x^3 + \frac{q0\,x^5}{5} + \frac{1}{5}\,q0\,(a-x)^4\,(4\,a+x)\,(-1+\text{UnitStep}[a-x]) - 4\,a\,B\,(-2\,a+x)^3\,\text{UnitStep}[-2\,a+x]\right)$$

Randbedingung Q = 0 liefert Konstante c1

```
a01 = Solve[Q[0] == 0, c1]
```

$$\left\{\left\{c1 \to \frac{1}{2}\,(-2\,B\,\text{UnitStep}[-2\,a] + a\,q0\,\text{UnitStep}[-a])\right\}\right\}$$

```
c1 = Simplify[c1 /. a01[[1]], Assumptions → a > 0]
```

0

Randbedingung M = 0 liefert Konstante c2

```
a02 = Solve[M[0] == 0, c2]
```

$$\left\{\left\{c2 \to \frac{1}{3}\left(6\,a\,B\,\text{UnitStep}[-2\,a] - a^2\,q0\,\text{UnitStep}[-a]\right)\right\}\right\}$$

```
c2 = Simplify[c2 /. a02[[1]], Assumptions → a > 0]
```

0

Randbedingung w ' = 3 a liefert Konstante c3

```
a03 = Solve[w'[3 a] == 0, c3]
```

$$\left\{\left\{c3 \to \frac{1}{120}\,a^2\left(-165\,a\,q0 + 112\,a^2\,q0\left(\begin{cases}\text{Indeterminate} & -2\,a == 0\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right) + 20\,a\,B\left(\begin{cases}\text{Indeterminate} & a == 0\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right) - 240\,a\,q0\,\text{UnitStep}[-2\,a] + 60\,B\,\text{UnitStep}[a]\right)\right\}\right\}$$

```
c3 = Simplify[c3 /. a03[[1]], Assumptions → a > 0]
```

$$-\frac{1}{8}\,a^2\,(-4\,B + 11\,a\,q0)$$

Übergangsbedingung w = 2 a liefert Konstante c4

```
a04 = Solve[w[2 a] == 0, c4]
```

$$\left\{\left\{c4 \to \frac{1}{60}\left(-60\,a^3\,B + 152\,a^4\,q0 - 3\,a^4\,q0\,\text{UnitStep}[-a]\right)\right\}\right\}$$

```
c4 = Simplify[c4 /. a04[[1]], Assumptions → a > 0]
```

$$-a^3\,B + \frac{38\,a^4\,q0}{15}$$

Randbedingung w = 3 a liefert Lagerkraft B

```
a05 = Solve[w[3 a] == 0, B]
```

$$\{\{B \to (a\,(-15\,q0 + 28\,q0\,\text{UnitStep}[-2\,a]))\,/\,(5\,(-3 + \text{UnitStep}[a]))\}\}$$

```
B = Simplify[B /. a05[[1]], Assumptions → a > 0]
```

$$\frac{3\,a\,q0}{2}$$

$$\frac{3\,a\,q0}{2}$$

Biegeliniefunktion w(x) mit den berechneten Konstanten c1, c2, c3, c4 und der Lagerkraft B

```
w[x]
```

$$\frac{31\,a^4\,q0}{30} - \frac{5}{8}\,a^3\,q0\,x + \frac{1}{24\,a}\left(\frac{q0\,x^5}{5} + \frac{1}{5}\,q0\,(a-x)^4\,(4\,a+x)\,(-1+\text{UnitStep}[a-x]) - 6\,a^2\,q0\,(-2\,a+x)^3\,\text{UnitStep}[-2\,a+x]\right)$$

Aufgabenteil b)

Berechnung der Durchbiegung w(x) = 0

```
Simplify[w[0], Assumptions → a > 0]
```

$$\frac{31\,a^4\,q0}{30}$$

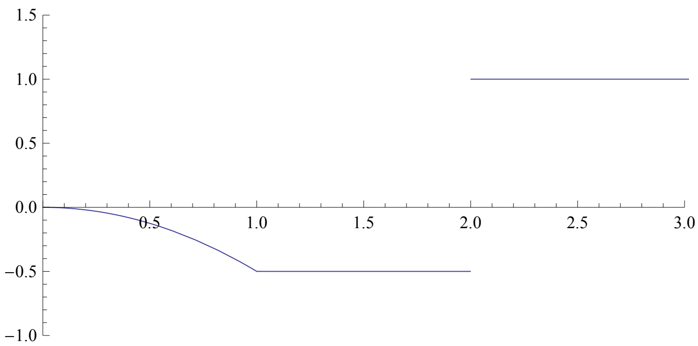
Aufgabenteil c)

Darstellung der Querkraftverlauf Q(x)

```
regel = {q0 → 1, a → 1}
```

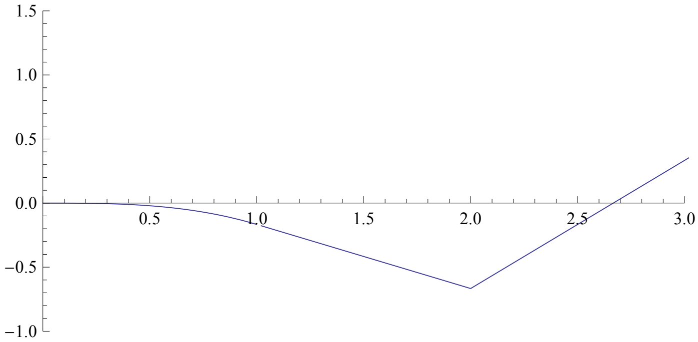
{q0 → 1, a → 1}

```
Plot[Evaluate[Q[x] /. regel], {x, 0, 5},
 PlotRange → {{0, 3}, {-1, 1.5}}, AspectRatio → 0.5]
```



Darstellung der Momentenverlauf M(x)

```
Plot[Evaluate[M[x] /. regel], {x, 0, 5},
 PlotRange → {{0, 3}, {-1, 1.5}}, AspectRatio → 0.5]
```



Aufgabenteil d)

Das betragsmäßig größte Schnittmoment wird durch den Graphen von Q(x) an der Stelle x = 2 bestimmt

```
M[2]
```

$$\frac{1}{6\,a}\left(-8\,q0+9\,(2-2\,a)\,a^2\,q0\,\text{UnitStep}[2-2\,a]+(-2+a)^2\,(2+2\,a)\,q0\,\text{UnitStep}[2-a]\right)$$

```
Simplify[M[2]]
```

$$\frac{1}{3\,a}q0\,\left(-4-9\,(-1+a)\,a^2\,\text{UnitStep}[2-2\,a]+(-2+a)^2\,(1+a)\,\text{UnitStep}[2-a]\right)$$

```
Simplify[M[2], Assumptions → a > 0]
```

$$\frac{1}{3\,a}q0\,\left(-4-9\,(-1+a)\,a^2\,\text{UnitStep}[2-2\,a]+(-2+a)^2\,(1+a)\,\text{UnitStep}[2-a]\right)$$

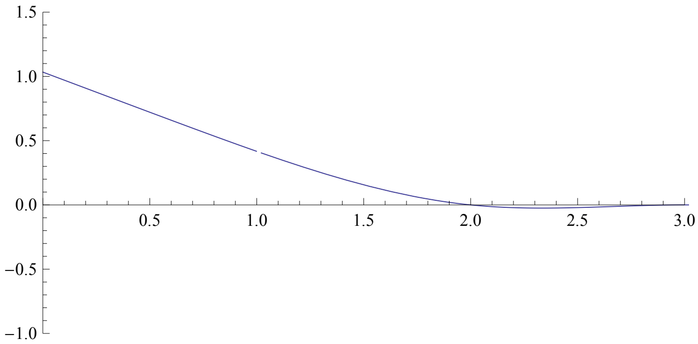
```
M[2] /. regel
```

$$-\frac{2}{3}$$

Aufgabenteil e)

Darstellung der Biegelinie w(x)

```
Plot[Evaluate[w[x] /. regel], {x, 0, 5},
 PlotRange → {{0, 3}, {-1, 1.5}}, AspectRatio → 0.5]
```



V) Fazit

Im Aufgabenteil a) wird das Integrieren durch die Föppl Symbolik geschult. Hierbei ist drauf zu achten das ein Vorzeichenwechsel bei der Streckenlast q(x) zur Querkraft Q(x) sowie vom Momentenverlauf M(x) zur Neigung w'(x) statt findet. Ebenso werden erst bei der Querkraft Q(x) die Lagerkräfte mit einbezogen. Beim Aufgabenteil c) ist zu beachten, dass die linear ansteigende Streckenlast eine Kurve im Querkraftverlauf erzeugt, ebenso entstehen durch Lagerkräfte Sprünge im Graphen. Sollte auch ein Gelenk in der Aufgabenstellung vorkommen, so erzeugt dies erst bei der Neigung einen Sprung. Hinweis zur Zeichnung: jeder Abschnitt lässt sich berechnen, indem man eine markante Stelle in die Funktion einfügt, somit erhält man den Funktionswert an dieser Stelle. Zum Beispiel, der Funktionswert an der Stelle "a" lässt sich durch Q(a) berechnen. Zum Aufgabenteil d): die Nullstellen der Querkraft (Ableitung) sind die Stellen, an denen die betragsmäßig größten Schnittmomente auftreten. Bei unserem Beispiel kann man es auch aus dem Graphen ablesen, jedoch gibt es andere Aufgaben wo man es nicht eindeutig aus dem Graphen erkennt und es rechnerisch bestimmt.