Fourier-Reihe

Verständnisaufbau mit Beispiel

I) Warum benutzen wir Fourier-Reihen?

Wir benutzen die Fourier-Reihe um eine Periodische Funktion in der technischen Schwingung auswerten zu können.

```
In[34]:= Remove["Global`*"]
```

Stückweise definierte Funktion

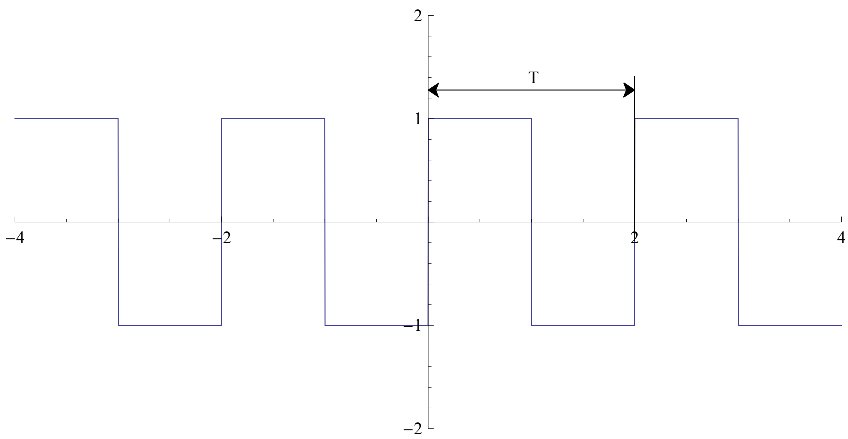
```
In[35]:= fp[x_] = Piecewise[{{-1, -1 < x ≤ 0}, {1, 0 < x <= 1}}, "Periodisch fortgesetzt"]

Out[35]= ⎧ -1                      -1 < x ≤ 0
         ⎨ 1                       0 < x ≤ 1
         ⎩ Periodisch fortgesetzt  True
```

p ist die Periodendauer, diese wird meistens T genannt

```
In[36]:= p = 2

Out[36]= 2
```

Um die Funktion in Mathematica periodisch fortgesetzt darzustellen benutzen wir die Modulus-Funktion

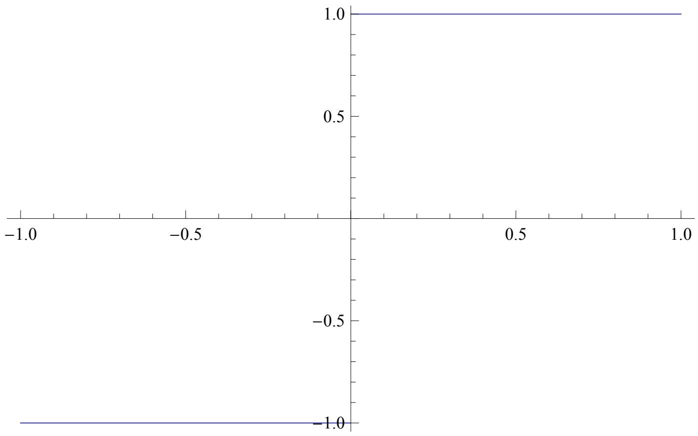
```
In[37]:= f1[x_] := -UnitStep[(Mod[x, p] - p) + 1] /; Mod[x, p] ≥ p / 2

In[38]:= f1[x_] := UnitStep[Mod[x, p]] /; Mod[x, p] < p / 2

In[39]:= Plot[f1[x], {x, -4, 4}, AspectRatio → 0.5, PlotRange → {{-4, 4}, {-2, 2}}];
```



Mit der Modulus-Funktion kann man allerdings nicht rechnen, deswegen definieren wir die Funktion im Intervall (-1,1]

```
In[40]:= f2[x_] := -UnitStep[x + 1] + 2 UnitStep[x]
```

In[41]:= `Plot[f2[x], {x, -1, 1}]`

Out[41]=


Berechnung der Kreisfrequenz ω

In[42]:= $\omega = 2\,\pi\,/\,p$

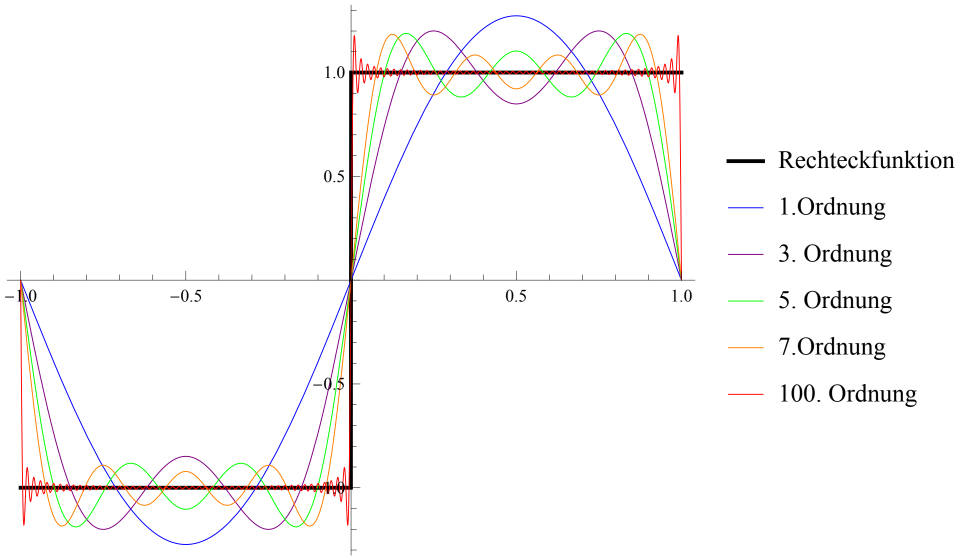
Out[42]= π

FourierTrigSeries berechnet bis zu einer gewählten Anzahl von Termen die Fourier-Reihe

```
In[43]:= fr1[x_] = FourierTrigSeries[f2[x], x, 1, FourierParameters → {1, ω}];

In[44]:= fr2[x_] = FourierTrigSeries[f2[x], x, 3, FourierParameters → {1, ω}];

In[45]:= fr3[x_] = FourierTrigSeries[f2[x], x, 5, FourierParameters → {1, ω}];

In[46]:= fr4[x_] = FourierTrigSeries[f2[x], x, 7, FourierParameters → {1, ω}];

In[47]:= fr5[x_] = FourierTrigSeries[f2[x], x, 100, FourierParameters → {1, ω}];
```

Darstellung verschiedener Ordnungen der Fourier-Reihe

```
In[48]:= Plot[{f1[x], fr1[x], fr2[x], fr3[x], fr4[x], fr5[x]},
  {x, -1, 1}, PlotLegends → {"Rechteckfunktion", "1.Ordnung",
    "3. Ordnung", "5. Ordnung", "7.Ordnung", "100. Ordnung"},
  PlotStyle → {{Thick, Black}, {Blue}, {Purple}, {Green}, {Orange}, {Red}},
  AspectRatio → 0.8]
```

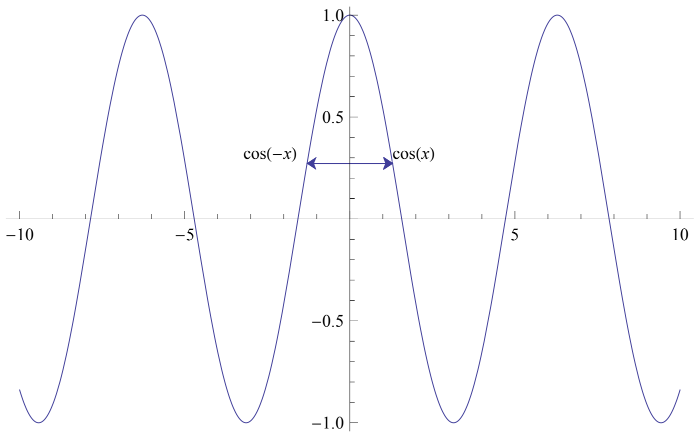
Out[48]=


Die 100. Ordnung (roter Graph) ähnelt sehr der Rechteckfunktion

II) Symmetrie

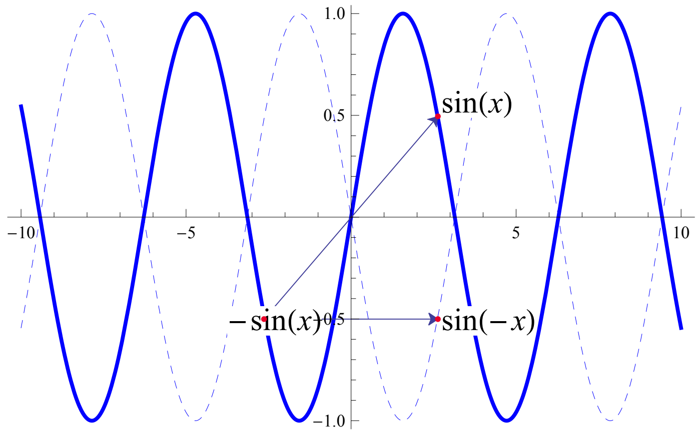
Achssymmetrie : $f(-x) = f(x)$ Der Funktionswert an der Stelle x ist gleich dem Funktionswert an der negativen Stelle x ($\cos(x) = \cos(-x)$)

In[49]:=
```
Plot[Cos[x], {x, -10, 10}];
```



Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung: $-f(x) = f(-x)$ Der negative Funktionswert an der Stelle x entspricht dem Funktionswert an der negativen Stelle x. ($(-\sin(x) = \sin(-x))$

In[50]:=
```
Plot[{Sin[x], Sin[-x]}, {x, -10, 10},
  PlotStyle → {{Blue, Thick}, {Blue, Thin, Dashed}}];
```



III) Vorgehensweise

<u>Schritt für Schritt zur Fourier-Reihe:</u>

1. Analysieren der Stückweise definierten Funktion

In[51]:=
```
fp[x_] = Piecewise[{{-1, -1 < x ≤ 0}, {1, 0 < x <= 1}}, "Periodisch fortgesetzt"]
```

Out[51]=

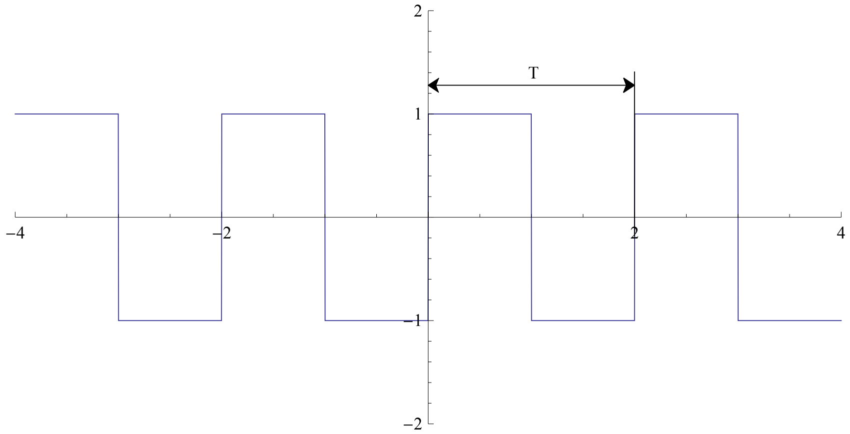
$$\begin{cases} -1 & -1 < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \\ \text{Periodisch fortgesetzt} & \text{True} \end{cases}$$

Man liest: Zwischen -1 und 0 hat die Funktion den y-Wert -1, Zwischen 0 und 1 hat die Funktion den y-Wert 1, an der Stelle 0 springt der Graph der Funktion von -1 auf 1. (Die Info 0 True

ist von Mathematica und wird in der technischen Schwingung so nicht geschrieben)

Die Funktion wird periodisch fortgesetzt bedeutet, dass vor und nach dem Intervall -1/1 sich die Stückweise definierte Funktion immer wiederholt.

2. Zeichnen des Graphen



Von -1 nach 1 oder auch von 0 bis 2 (wie in dem Graphen oben), ist die die Periodendauert T immer 2

Damit lässt sich nun ω berechnen. $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

3. Berechnen des Mittelwertes a_0

Der Mittelwert ist immer der Wert um welche die Fourier-Reihe schwingt.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt =$$

$$\frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} 1\,dt + \int_{T/2}^{T} -1\,dt\right) = \frac{1}{T}\left(1*t\Big|_0^{T/2} + (-1)*t\Big|_{T/2}^{T}\right) = \frac{1}{T}(T/2 + (-T-(-T/2))) = \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} - T + \frac{T}{2}\right) = 0$$

4. Berechnen der Fourier – Koeffizienten a_n und b_n

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)*\cos(n*\omega*t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)*\sin(n*\omega*t)\,dt$$

Da durch das Integrieren von Cosinus der Sinus entsteht und dieser Punksymmetrie hat sind alle $a_n = 0$.

Der Fourier-Koeffizient b_1 wird wie folgt berechnet

$$b_1 = \frac{2}{2}\left(\int_0^1 1*\sin(1*\pi*t)\,dt + \int_1^2 (-1)*\sin(1*\pi*t)\,dt\right) = -\frac{\text{Cos}[\pi t]}{\pi}\Big|_0^1 + \frac{\text{Cos}[\pi t]}{\pi}\Big|_1^2 =$$

$$-\frac{\text{Cos}[\pi]}{\pi} - \left(-\frac{\text{Cos}[0]}{\pi}\right) + \frac{\text{Cos}[2*\pi]}{\pi} - \frac{\text{Cos}[\pi]}{\pi} = -\frac{-1}{\pi} - \left(-\frac{1}{\pi}\right) + \frac{1}{\pi} - \frac{-1}{\pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

Nun kann man weitere Fourier-Koeffizienten höherer Ordnung berechnen. Man ersetzt einfach jedes n mit der gewünschten Ordnung.

Mit den Fourier-Koeffizienten geht man dann in die Formel:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n*\cos(n*\omega*t) + b_n*\sin(n*\omega*t)$$

Daraus folgt die Grundschwingung welches die erste Harmonische ist

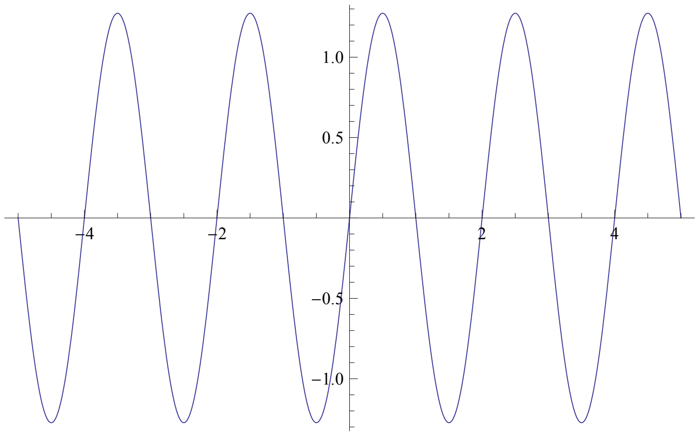
$$n = 1 : f(t) = 0 + a_1*\cos(1*\omega*t) + b_1*\sin(1*\omega*t) = \frac{4}{\pi}*\sin(\pi*t)$$

In[52]:= $b1 = \frac{4}{\pi} * Sin[\pi * t]$

Out[52]= $\frac{4\,Sin[\pi\,t]}{\pi}$

In[53]:= `Plot[b1, {t, -5, 5}]`

Out[53]=



Die erste Oberschwingung (zweite Harmonische) liefert keinen Beitrag zur Fourier-Reihe. Deshalb folgt als nächstes die zweite Oberschwingung (dritte Harmonische).

In[54]:= $b3[t\_] = \frac{2}{2}\left(\int_0^1 1 * Sin[3 * \pi * t]\,dt + \int_1^2 (-1) * Sin[3 * \pi * t]\,dt\right)$

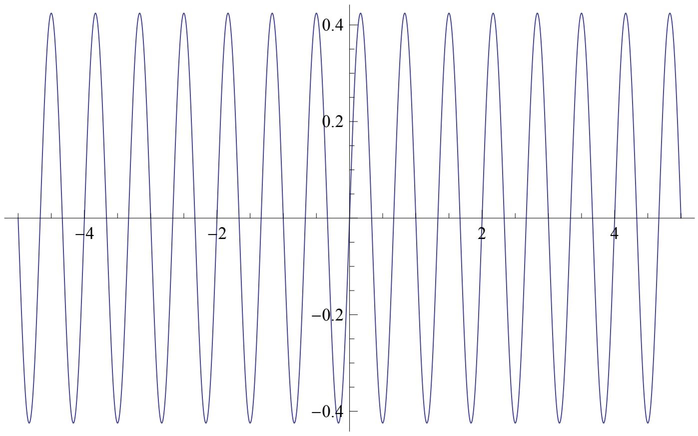
Out[54]= $\frac{4}{3\,\pi}$

In[55]:= $b3 = b3[t] * Sin[3 * \pi * t]$

Out[55]= $\frac{4\,Sin[3\,\pi\,t]}{3\,\pi}$

In[56]:= `Plot[b3, {t, -5, 5}]`

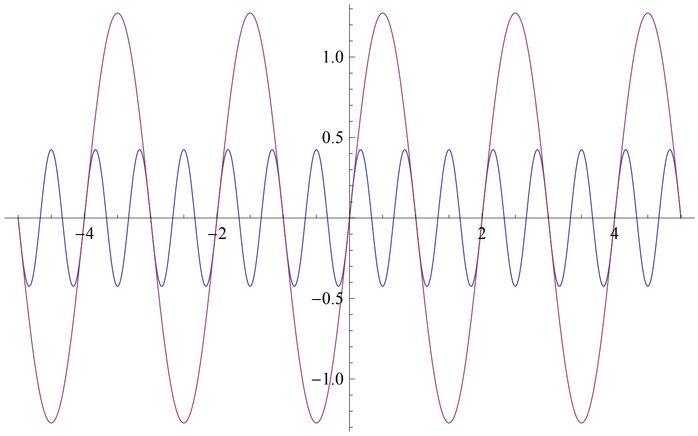
Out[56]=



Grundschwingung und erste Oberschwingung in einem Plot dargestellt

In[67]:= `Plot[{b3, b1}, {t, -5, 5}]`

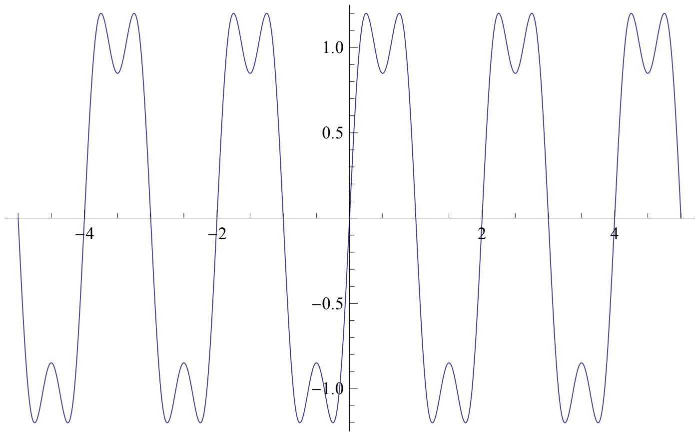
Out[67]=



Die Überlagerung beider Schwingungen ähneln schon ein wenig der Rechteckfunktion

In[57]:= `Plot[b3 + b1, {t, -5, 5}]`

Out[57]=



Für die technische Schwingungslehere ist es nicht notwendig undenlich viele Terme zu berechnen. Mit der ersten Harmonischen ist man schon über der maximalen Krafterregung.

IV) Manipulate

Darstellung der Fourier-Reihe mittels Manipulate

In[58]:= `b01[n_] = Integrate[(-UnitStep[x + π] + 2 UnitStep[x]) Sin[n x], {x, -π, π}]`

Out[58]= $\frac{2 - 2 \text{Cos}[n \pi]}{n}$

In[59]:= `b02[n_] = Integrate[x^5 Sin[n x], {x, -π, π}]`

Out[59]= $-\frac{1}{n^6} 2 \left(n \pi \left(120 - 20 n^2 \pi^2 + n^4 \pi^4\right) \text{Cos}[n \pi] - 5 \left(24 - 12 n^2 \pi^2 + n^4 \pi^4\right) \text{Sin}[n \pi]\right)$

In[60]:= `b02[n_] = 1 / π b02[n]`

Out[60]= $-\frac{1}{n^6 \pi} 2 \left(n \pi \left(120 - 20 n^2 \pi^2 + n^4 \pi^4\right) \text{Cos}[n \pi] - 5 \left(24 - 12 n^2 \pi^2 + n^4 \pi^4\right) \text{Sin}[n \pi]\right)$

In[61]:=
```
b03[n_] = Integrate[x Sin[n x], {x, -π, π}]
```

Out[61]=
$$\frac{-2\,n\,\pi\,\mathrm{Cos}[n\,\pi]+2\,\mathrm{Sin}[n\,\pi]}{n^2}$$

In[62]:=
```
b03[n_] = 1 / π b03[n]
```

Out[62]=
$$\frac{-2\,n\,\pi\,\mathrm{Cos}[n\,\pi]+2\,\mathrm{Sin}[n\,\pi]}{n^2\,\pi}$$

In[63]:=
```
g01[x_, Nmax_] := Sum[b01[n] Sin[n x], {n, 1, Nmax}]
```

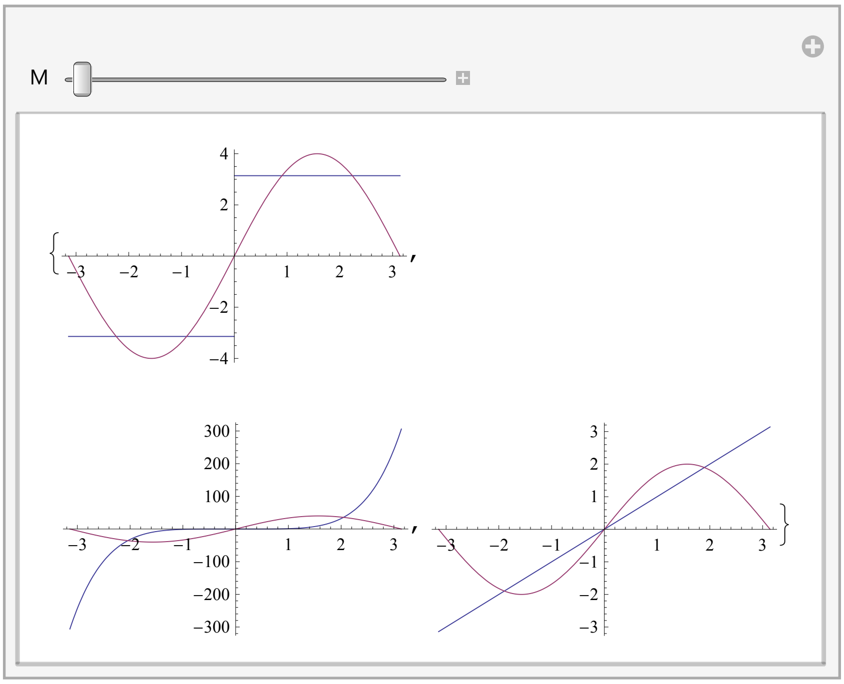
In[64]:=
```
g02[x_, Nmax_] := Sum[b02[n] Sin[n x], {n, 1, Nmax}]
```

In[65]:=
```
g03[x_, Nmax_] := Sum[b03[n] Sin[n x], {n, 1, Nmax}]
```

Verschiebt man den Regler “M”, erreicht man dadurch eine höhere Ordnung der Fourier-Reihe. Gleichzeitig wird die Reihe berechnet und in den unten Dargestellten Graphen dargestellt. Durch das kleine “+“ neben dem Regler öffnet sich eine Auswahl, wo man auf Play drücken kann. Hier kann beobachtet werden wie sich die Fourier-Reihe mit zunehmenden Termen immer weiter der vorgegebenen nicht harmonischen Kurve annähert.

In[66]:=
```
Manipulate[
 {Plot[{-Pi * UnitStep[x + π] + 2 * Pi * UnitStep[x], g01[x, M]}, {x, -π, π}],
  Plot[{x^5, g02[x, M]}, {x, -π, π}, PlotRange → All],
  Plot[{x, g03[x, M]}, {x, -Pi, Pi}]}, {M, 1, 15}]
```

Out[66]=



Die Fourier-Reihe dient der Darstellung nicht-harmonischer periodischer Funktionen. Dabei wird diese Funktion in viele harmonische Terme zerlegt und aufaddiert. Hintergrund: Mit der nicht-harmonischen periodischen Funktion kann man nicht Rechnen. Um damit Rechnen zu können muss zuerst eine Fourier-Reihe aufgebaut werden.