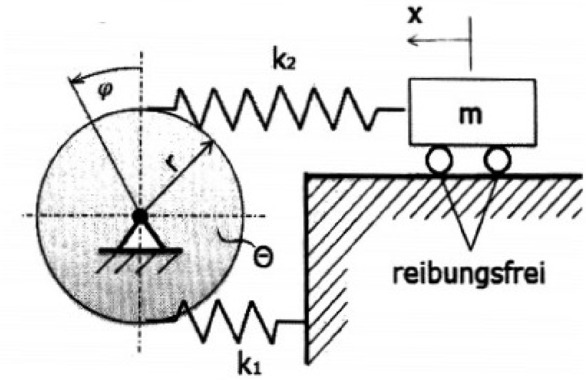
TS: Ü3/1

Lagrangesche Gleichung 2. Art, Eigenkreisfreuquenzen und Eigenverhalten

I) Aufgabenstellung



Für das Reibungsfreie System sollen die Schwingungsdifferentialgleichungen mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichung 2. Art aufgestellt werden.

Gegeben:

- θ
- m
- k_1
- k_2
- r

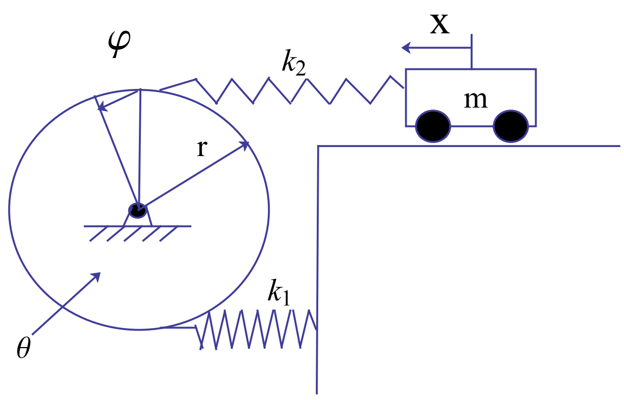
Gesucht:

- Schwingungs-Dgln. für kleine Auslenkungen

Zusatzaufgabe:

- Berechnung der Eigenkreisfrequenzen und Eigenverhalten unter der Annahme $k_1 = k_2$.

II) Freikörperbild

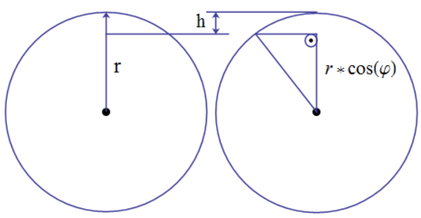


III) Vorarbeit

Die Kreisscheibe rotiert entgegen dem Uhrzeigersinn. Dadurch wird die Feder k1 gestreckt und die Feder k2 gestaucht. Durch die Trägheit des Wagens, führt dieser eine zeitversetzte transiente Bewegung aus. (Er hängt nach!)
Durch die gegebenen Koordinaten φ und x sollen nun die entsprechenden Kinetischen und Potentiellen Energien aufgestellt werden. Mit der 2. Art der Langrageschen Gleichung werden dann die Schwingungs-Dgln. konstruiert.

Formeln:	Potentielle Energie	$\rightarrow E_P = m * g * h + \frac{1}{2} * k * (\Delta l)^2$
(Lageanteil + Federanteil)		
	Kinitische Energie	$\rightarrow E_K = \frac{1}{2} * m * v^2$
	Lagrangesche Funktion	$\rightarrow L = E_K - E_P$
	Lagrangesche Gleichung 2. Art	$\rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$

Kleine Auslenkungen bedeuten, dass die Winkelfunktion linearisiert werden. $\sin(\varphi) = \varphi$, $\cos(\varphi) = 1$
Dadurch entfällt der Lageanteil bei der Potentielle Energie



$E_P = m * g * h + \text{Federanteil} = m * g * (r - r * \cos(\varphi)) + \text{Federanteil} =$
$m * g * (r - r * 1) + \text{Federanteil} = m * g * 0 + \text{Federanteil} = \text{Federanteil}$

IV) Lösung

Schwingungs-Dgln. für kleine Auslenkungen

In[354]:=
```
Remove["Global`*"]
```

In[355]:=
```
Quantity[m, "Kilogramms"];
```

In[356]:=
```
Quantity[{k1, k2}, "Newtons/Meters"];
```

In[357]:=
```
Quantity[{x, r}, "Meters"];
```

In[358]:=
```
Quantity[θ, "Meters^2*Kilogramms"];
```

In[359]:=
```
Quantity[φ, "rad"];
```

Einheiten werden in *Mathematica* in plural bezeichnet.

Aufstellen der potentiellen Energie

In[360]:=
```
Ep[x_, φ_] := 1/2 k1 * (r * φ)^2 + 1/2 k2 * ((r * φ) - x)^2
```

Aufstellen der kinetischen Energie

In[361]:=
```
Ek[xp_, φp_] := 1/2 * m * xp^2 + 1/2 * θ * φp^2
```

In[362]:=
```
L[x_, φ_, xp_, φp_] = Ek[xp, φp] - Ep[x, φ]
```

Out[362]= $\frac{m\,xp^2}{2} - \frac{1}{2} k1\, r^2 \varphi^2 - \frac{1}{2} k2\, (-x + r\,\varphi)^2 + \frac{\theta\,\varphi p^2}{2}$

Aufstellen der Lagrangeschen Gleichung 2. Art mit $q = x$ und $\dot{q} = xp$

In[363]:=
```
Lx = D[L[x, φ, xp, φp], x]
```

Out[363]= $k2\,(-x + r\,\varphi)$

In[364]:=
```
Lxp = D[L[x, φ, xp, φp], xp]
```

Out[364]= $m\,xp$

In[365]:=
```
Zeitabhängig = {x → x[t], xp → x'[t], φ → φ[t], φp → φ'[t]}
```

Out[365]= $\{x \to x[t],\ xp \to x'[t],\ \varphi \to \varphi[t],\ \varphi p \to \varphi'[t]\}$

In[366]:=
```
Lxpt[t_] = Lxp /. Zeitabhängig
```

Out[366]= $m\,x'[t]$

In[367]:=
```
LxptL = Lxpt'[t]
```

Out[367]= $m\,x''[t]$

1. Gleichung der Bewegungsgröße x

In[368]:=
```
L01 = LxptL - (Lx /. Zeitabhängig) == 0
```

Out[368]= $-k2\,(-x[t] + r\,\varphi[t]) + m\,x''[t] == 0$

Aufstellen der Lagrangeschen Gleichung 2. Art mit $q = \varphi$ und $\dot{q} = \varphi p$

In[369]:=
```
Lφ = D[L[x, φ, xp, φp], φ]
```

Out[369]= $-k1\,r^2\,\varphi - k2\,r\,(-x + r\,\varphi)$

In[370]:= **Lφp = D[L[x, φ, xp, φp], φp]**

Out[370]= $\Theta\ \varphi p$

In[371]:= **Lφpt[t_] = Lφp /. Zeitabhängig**

Out[371]= $\Theta\ \varphi'[t]$

In[372]:= **LφptL = Lφpt'[t]**

Out[372]= $\Theta\ \varphi''[t]$

2. Gleichung der Bewegungsgröße φ

In[373]:= **L02 = LφptL - (Lφ /. Zeitabhängig) == 0**

Out[373]= $k1\ r^2\ \varphi[t] + k2\ r\ (-x[t] + r\ \varphi[t]) + \Theta\ \varphi''[t] == 0$

Einschub: DGL lösen und Darstellung von Szenarien

In den folgenden Szenarien zeigen wir Schwingungen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen.

In[374]:= **parameter = {m → 2, θ → 2, k1 → 0.5, k2 → 0.5, r → 1}**

Out[374]= {m → 2, θ → 2, k1 → 0.5, k2 → 0.5, r → 1}

In[375]:= **L01p = L01 /. parameter**

Out[375]= $-0.5\ (-x[t] + \varphi[t]) + 2\ x''[t] == 0$

In[376]:= **L02p = L02 /. parameter**

Out[376]= $0.5\ \varphi[t] + 0.5\ (-x[t] + \varphi[t]) + 2\ \varphi''[t] == 0$

Szenario 1: Anfangsauslenkung des Wagens: x(0)=-1

In[377]:= **LSG = DSolve[{L01p, L02p, x[0] == -1, φ[0] == 0, x'[0] == 0, φ'[0] == 0}, {x[t], φ[t]}, t]**

Out[377]=
$$\{\{x[t] \to (5.97471\times10^{-20} + 0.723607\,i)\ ((0. + 1.\,i)\ Cos[0.309017\,t] - (1.14107\times10^{-19} - 0.381966\,i)\ Cos[0.809017\,t] + (5.39644\times10^{-17} + 1.8867\times10^{-16}\,i)\ Sin[0.309017\,t] - (2.06126\times10^{-17} + 7.20655\times10^{-17}\,i)\ Sin[0.809017\,t]),$$
$$\varphi[t] \to (2.30066\times10^{-18} + 0.447214\,i)\ ((0. + 1.\,i)\ Cos[0.309017\,t] - (0. + 1.\,i)\ Cos[0.809017\,t] + (8.32667\times10^{-17} + 4.09224\times10^{-16}\,i)\ Sin[0.309017\,t] - (3.18051\times10^{-17} + 1.5631\times10^{-16}\,i)\ Sin[0.809017\,t])\}\}$$

In[378]:= **LSG = % // Chop // FullSimplify**

Out[378]= {{x[t] → -0.723607 Cos[0.309017 t] - 0.276393 Cos[0.809017 t],
φ[t] → -0.447214 Cos[0.309017 t] + 0.447214 Cos[0.809017 t]}}

In[379]:= **xawp[t_] = x[t] /. LSG[[1]]**

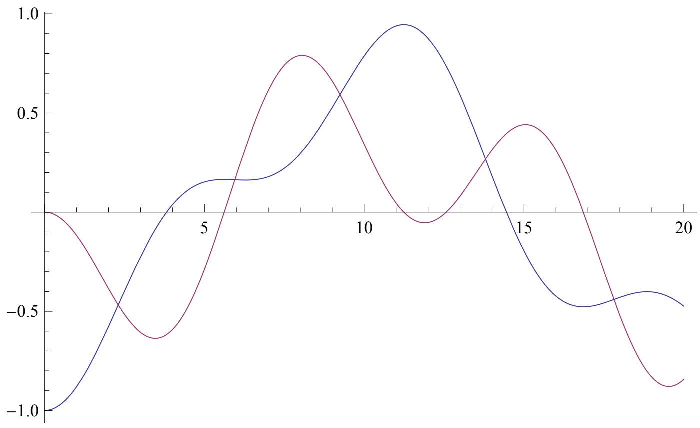
Out[379]= -0.723607 Cos[0.309017 t] - 0.276393 Cos[0.809017 t]

In[380]:= **φawp[t_] = φ[t] /. LSG[[1]]**

Out[380]= -0.447214 Cos[0.309017 t] + 0.447214 Cos[0.809017 t]

In[381]:=
```
Plot[{xawp[t], φawp[t]}, {t, 0, 20}, PlotRange → All]
```

Out[381]=



Szenario 2: Anfangsauslenkung der Rolle: $\varphi(0)=-1$

In[382]:=
```
LSG =
 DSolve[{L01p, L02p, x[0] == 0, φ[0] == -1, x'[0] == 0, φ'[0] == 0}, {x[t], φ[t]}, t]
```

Out[382]=
$$\{\{x[t] \to (7.32559\times10^{-19} + 0.447214\, i)\,((0. + 1.\, i)\, \mathrm{Cos}[0.309017\, t] - (1.7226\times10^{-33} + 1.\, i)\, \mathrm{Cos}[0.809017\, t] - (1.43618\times10^{-33} + 7.17107\times10^{-16}\, i)\, \mathrm{Sin}[0.309017\, t] + (5.48573\times10^{-34} + 2.7391\times10^{-16}\, i)\, \mathrm{Sin}[0.809017\, t]),$$
$$\varphi[t] \to (-0.276393 - 1.1853\times10^{-18}\, i)\,((1. + 0.\, i)\, \mathrm{Cos}[0.309017\, t] + (2.61803 - 1.55158\times10^{-17}\, i)\, \mathrm{Cos}[0.809017\, t] - (4.82105\times10^{-16} - 1.0832\times10^{-32}\, i)\, \mathrm{Sin}[0.309017\, t] + (1.84148\times10^{-16} - 4.13745\times10^{-33}\, i)\, \mathrm{Sin}[0.809017\, t])\}\}$$

In[383]:=
```
LSG = % // Chop // FullSimplify
```

Out[383]=
$$\{\{x[t] \to -0.447214\, \mathrm{Cos}[0.309017\, t] + 0.447214\, \mathrm{Cos}[0.809017\, t],$$
$$\varphi[t] \to -0.276393\, \mathrm{Cos}[0.309017\, t] - 0.723607\, \mathrm{Cos}[0.809017\, t]\}\}$$

In[384]:=
```
xawp[t_] = x[t] /. LSG[[1]]
```

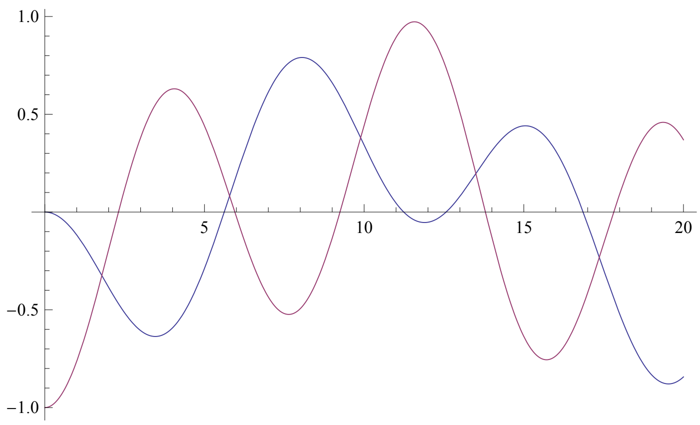
Out[384]=
$$-0.447214\, \mathrm{Cos}[0.309017\, t] + 0.447214\, \mathrm{Cos}[0.809017\, t]$$

In[385]:=
```
φawp[t_] = φ[t] /. LSG[[1]]
```

Out[385]=
$$-0.276393\, \mathrm{Cos}[0.309017\, t] - 0.723607\, \mathrm{Cos}[0.809017\, t]$$

In[386]:=
```
Plot[{xawp[t], φawp[t]}, {t, 0, 20}, PlotRange → All]
```

Out[386]=



Szenario 3: Anfangsauslenkung der Rolle und des Wagens : $\varphi(0)=-1$; $x(0)=-1$

In[387]:=
```
LSG =
 DSolve[{L01p, L02p, x[0] == -1, φ[0] == -1, x'[0] == 0, φ'[0] == 0}, {x[t], φ[t]}, t]
```

Out[387]=
$$\{\{x[t] \to (-1.17082 + 7.92306 \times 10^{-19}\, i) ((1. + 0.\, i) \mathrm{Cos}[0.309017\, t] - (0.145898 - 5.77979 \times 10^{-19}\, i) \mathrm{Cos}[0.809017\, t] - (1.57306 \times 10^{-16} + 3.33518 \times 10^{-17}\, i) \mathrm{Sin}[0.309017\, t] + (6.00855 \times 10^{-17} + 1.27393 \times 10^{-17}\, i) \mathrm{Sin}[0.809017\, t]),$$
$$\varphi[t] \to (1.11535 \times 10^{-18} + 0.723607\, i) ((0. + 1.\, i) \mathrm{Cos}[0.309017\, t] - (2.13013 \times 10^{-18} - 0.381966\, i) \mathrm{Cos}[0.809017\, t] + (5.14617 \times 10^{-17} + 6.87666 \times 10^{-17}\, i) \mathrm{Sin}[0.309017\, t] - (1.96566 \times 10^{-17} + 2.62665 \times 10^{-17}\, i) \mathrm{Sin}[0.809017\, t])\}\}$$

In[388]:=
```
LSG = % // Chop // FullSimplify
```

Out[388]=
$$\{\{x[t] \to -1.17082\, \mathrm{Cos}[0.309017\, t] + 0.17082\, \mathrm{Cos}[0.809017\, t],$$
$$\varphi[t] \to -0.723607\, \mathrm{Cos}[0.309017\, t] - 0.276393\, \mathrm{Cos}[0.809017\, t]\}\}$$

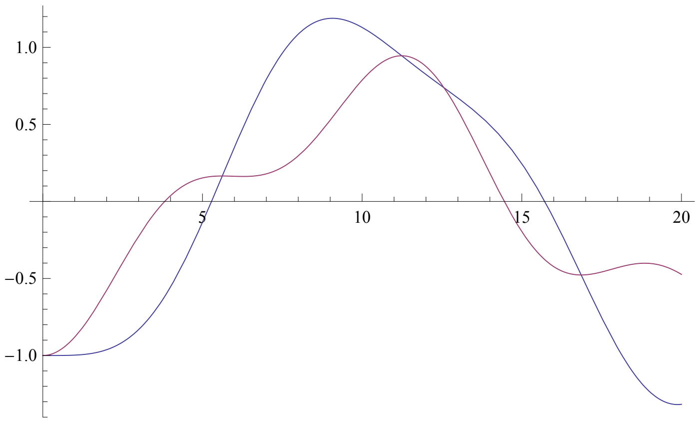
In[389]:=
```
xawp[t_] = x[t] /. LSG[[1]]
```

Out[389]=
$$-1.17082\, \mathrm{Cos}[0.309017\, t] + 0.17082\, \mathrm{Cos}[0.809017\, t]$$

In[390]:=
```
φawp[t_] = φ[t] /. LSG[[1]]
```

Out[390]=
$$-0.723607\, \mathrm{Cos}[0.309017\, t] - 0.276393\, \mathrm{Cos}[0.809017\, t]$$

In[391]:=
```
Plot[{xawp[t], φawp[t]}, {t, 0, 20}, PlotRange → All]
```

Out[391]=


Szenario 4: Anfangsauslenkung der Rolle und des Wagens : $\varphi(0)$=-1; x(0)=1

In[392]:=
```
LSG =
 DSolve[{L01p, L02p, x[0] == 1, φ[0] == -1, x'[0] == 0, φ'[0] == 0}, {x[t], φ[t]}, t]
```

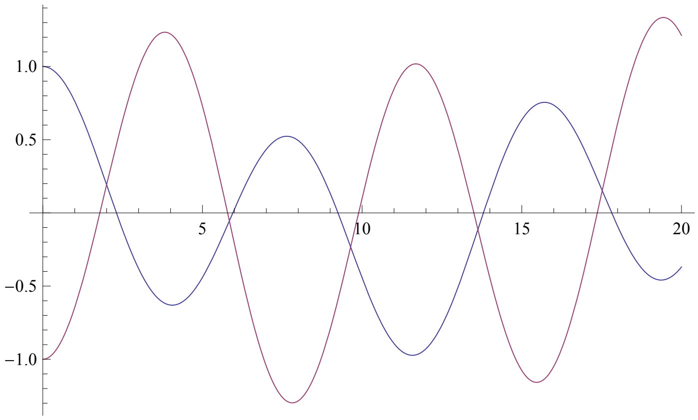
Out[392]=
$$\{\{x[t] \to (0.276393 + 6.72811 \times 10^{-19}\, i) ((1. + 0.\, i) \mathrm{Cos}[0.309017\, t] + (2.61803 - 8.80722 \times 10^{-18}\, i) \mathrm{Cos}[0.809017\, t] + (1.65425 \times 10^{-15} - 1.41281 \times 10^{-16}\, i) \mathrm{Sin}[0.309017\, t] - (6.31866 \times 10^{-16} - 5.39644 \times 10^{-17}\, i) \mathrm{Sin}[0.809017\, t]),$$
$$\varphi[t] \to (3.48596 \times 10^{-18} + 0.17082\, i) ((0. - 1.\, i) \mathrm{Cos}[0.309017\, t] - (1.19466 \times 10^{-16} - 6.8541\, i) \mathrm{Cos}[0.809017\, t] - (2.17995 \times 10^{-16} + 1.85143 \times 10^{-15}\, i) \mathrm{Sin}[0.309017\, t] + (8.32667 \times 10^{-17} + 7.07182 \times 10^{-16}\, i) \mathrm{Sin}[0.809017\, t])\}\}$$

In[393]:=
```
LSG = % // Chop // FullSimplify
```
Out[393]=
```
{{x[t] → 0.276393 Cos[0.309017 t] + 0.723607 Cos[0.809017 t],
  φ[t] → 0.17082 Cos[0.309017 t] - 1.17082 Cos[0.809017 t]}}
```

In[394]:=
```
xawp[t_] = x[t] /. LSG[[1]]
```
Out[394]=
```
0.276393 Cos[0.309017 t] + 0.723607 Cos[0.809017 t]
```

In[395]:=
```
φawp[t_] = φ[t] /. LSG[[1]]
```
Out[395]=
```
0.17082 Cos[0.309017 t] - 1.17082 Cos[0.809017 t]
```

In[396]:=
```
Plot[{xawp[t], φawp[t]}, {t, 0, 20}, PlotRange → All]
```
Out[396]=



Ende des Einschubs

Zusatzaufgabe: Berechnung der Eigenkreisfrequenzen und der Eigenverhalten

Formeln: Bewegungsdifferentialgleichung $\rightarrow \underline{M} * \ddot{\underline{X}} + \underline{D} * \dot{\underline{X}} + \underline{K} * \underline{X} = \underline{f}$

$\underline{M}$ = Massenmatrix

$\underline{D}$ = Dämpfungsmatrix (keine Dämpfung vorhanden)

$\underline{K}$ = Steifigkeitsmatrix (Nebendiagonale muss gleich sein)

$\ddot{\underline{X}}, \dot{\underline{X}}, \underline{X}$ = Beschleunigungs –, Geschwindigkeit –, Streckenmatrix

$\underline{f}$ = Erregerkraftvektor (keine Erregung vorhanden)

Determinante $\rightarrow \det\left(-\omega^2 * \underline{M} + \underline{K}\right) = 0$

Eigenvektoren $\rightarrow \left(-\omega^2 * \underline{M} + \underline{K}\right) * \varphi = 0$

Aufstellen der Massenmatrix

In[397]:=
$$\text{mM} = \begin{pmatrix} \text{m} & 0 \\ 0 & 1/2 * \text{m} * \text{r}^\wedge 2 \end{pmatrix}$$
Out[397]=
$$\left\{\{m, 0\}, \left\{0, \frac{m\, r^2}{2}\right\}\right\}$$

Annahme: k1 = k2, da sonst zu lange Ergebnisse raus kommen

In[398]:=
```
k1 = k2
```
Out[398]=
```
k2
```

Aufstellen der Steifigkeitsmatrix

In[399]:= $kM = \begin{pmatrix} k2 & -k2*r \\ -k2*r & k1*r^2+k2*r^2 \end{pmatrix}$

Out[399]= $\{\{k2, -k2\, r\}, \{-k2\, r, 2\, k2\, r^2\}\}$

In[400]:= `m01 = Det[-ω^2 * mM + kM]`

Out[400]= $k2^2\, r^2 - \frac{5}{2}\, k2\, m\, r^2\, \omega^2 + \frac{1}{2}\, m^2\, r^2\, \omega^4$

Substitution $\omega^2 = z,\ \omega^4 = z^2$

In[401]:= $u01 = m01\ /.\ \{\omega^2 \to z,\ \omega^4 \to z\text{^}2\}$

Out[401]= $k2^2\, r^2 - \frac{5}{2}\, k2\, m\, r^2\, z + \frac{1}{2}\, m^2\, r^2\, z^2$

In[402]:= `u02 = Solve[u01 == 0, z]`

Out[402]= $\left\{\left\{z \to \frac{5\, k2 - \sqrt{17}\, k2}{2\, m}\right\}, \left\{z \to \frac{5\, k2 + \sqrt{17}\, k2}{2\, m}\right\}\right\}$

Mit der Rücksubstitution folgen die Eigenkreisfrequenzen

In[403]:= `u03 = u02 /. z -> ω^2`

Out[403]= $\left\{\left\{\omega^2 \to \frac{5\, k2 - \sqrt{17}\, k2}{2\, m}\right\}, \left\{\omega^2 \to \frac{5\, k2 + \sqrt{17}\, k2}{2\, m}\right\}\right\}$

In[404]:= `ω1 = Sqrt[u02[[1, 1, 2]]]`

Out[404]= $\frac{\sqrt{\frac{5\, k2 - \sqrt{17}\, k2}{m}}}{\sqrt{2}}$

Berechnung der Eigenverhalten

In[405]:= `e01 = -ω1^2 * mM + kM`

Out[405]= $\left\{\left\{k2 + \frac{1}{2}\left(-5\, k2 + \sqrt{17}\, k2\right), -k2\, r\right\}, \left\{-k2\, r, 2\, k2\, r^2 - \frac{1}{4}\left(5\, k2 - \sqrt{17}\, k2\right) r^2\right\}\right\}$

In[406]:= `e02 = Eigenvectors[e01]`

Out[406]= $\left\{\left\{\frac{1}{4}\left(3\, r + \sqrt{17}\, r\right), 1\right\}, \left\{-\frac{-3 + \sqrt{17}}{2\, r}, 1\right\}\right\}$

In[407]:= `Eigenverhalten1 = MatrixForm[e02[[1]]]`

Out[407]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(3\, r + \sqrt{17}\, r\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

In[408]:= `Eigenverhalten2 = MatrixForm[e02[[2]]]`

Out[408]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{-3+\sqrt{17}}{2\, r} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wenn sich die Bewegungsgröße *x* um “1” in Richtung der x-Koordinate bewegt, bewegt sich die

Bewegungsgröße φ um $-\frac{-3+\sqrt{17}}{2\,r}$ in Richtung der φ-Koordinate.

V) Fazit

In dieser Aufgabe wird das Aufstellen der Langrangeschen Gleichung geübt. Dabei muss beachtet werden, dass man an alles denkt. Nur wegen der Linearisierung entfällt der Lageanteil der potentiellen Energie. In anderen Aufgaben ist dies nicht der Fall oder es bedarf einer komplexeren Linearisierung. Um die Übersicht zu erhalten ist es angebracht strukturiert vorzugehen. Erst die eine Bewegungsgröße berechnen und sobald die Bgl aufgestellt ist, mit der anderen anfangen. Und man muss immer drauf achten welche die generalisierten Koordinaten sind (Immer auf diese Koordinaten umrechnen).

Bei der Berechnung der Eigenkreisfrequenzen sind als aller erstes die Matrizen der Masse und Steifigkeit zu bilden. In unserem Fall kann man sich das ganze so betrachten:

$$m\,x'' + 0*\varphi'' - \mathrm{k2}(-x + r\,\varphi) = 0 \qquad = m*x'' \quad + 0*\varphi'' \quad + \mathrm{k2}*x \qquad - \mathrm{k2}*r*\varphi = 0$$

$$0*x'' + \theta\,\varphi'' + \mathrm{k2}\,r\,(-x + r\,\varphi) + \mathrm{k1}\,r^2\,\varphi = 0$$

$$= 0*x'' \quad + \theta*\varphi'' \quad - \mathrm{k2}*r*x \quad + \left(\mathrm{k1}*r^2 + \mathrm{k2}*r^2\right)*\varphi = 0$$

$\Longrightarrow$ Massenmatrix: $\underline{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ Steifigkeitsmatrix: $\underline{K} = \begin{pmatrix} \mathrm{k2} & -\mathrm{k2}*r \\ -\mathrm{k2}*r & \left(\mathrm{k1}*r^2 + \mathrm{k2}*r^2\right) \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ Bewegungsdgl: $\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x'' \\ \varphi'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{k2} & -\mathrm{k2}*r \\ -\mathrm{k2}*r & \left(\mathrm{k1}*r^2 + \mathrm{k2}*r^2\right) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix} = \underline{0}$

Zur Selbstkontrolle: Die Nebendiagonale der Steifigkeitsmatrix muss gleich sein $(-\mathrm{k2}*r)$.