TM-III: Klausuraufgabe B/2

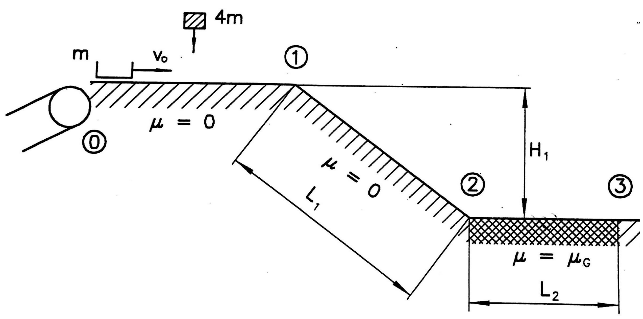
Impuls-,Energie-,Arbeitssatz

I) Aufgabenstellung

Ein Behälter (Masse m) eines Transportsystems verlässt an der Stelle 0 ein Förderband mit der Geschwindigkeit v_0 und gleitet reibungsfrei auf einer horizontalen Bahn. Beim Beladen nimmt er die Masse 4 m auf, die selbst keine Horizontalgeschwindigkeit hat. Anschließend gleitet der Behälter abwärts zur Stelle 2, an der eine Bremsstrecke beginnt (Reibungskoeffizient zwischen Behälter und Bahn: μ_G).

Gegeben:

- Erdbeschleunigung: g
- Masse: m
- Geschwindigkeit: v_0
- Reibungskoeffizient: μ_G
- Längen: L_1, L_2
- Höhe: $H_1 = \frac{198 * v_0^2}{100 * g}$



Gesucht:

- Geschwindigkeiten v_2 und v_3 an der Stelle 2 und 3

II) Freikörperbild

Kein Freikörperbild erforderlich.

III) Vorarbeit

Aus der Aufgabenstellung erkennen wir, dass für den ersten Schritt zur Lösung der Impulssatz benötigt wird. Wir verwenden hier den Impulssatz, da die Masse 4 m auf den Wagen m fällt. Dies ist zu berücksichtigen, weil der Wagen nach dem Stoß mit der Masse 4 m eine andere Geschwindigkeit v_1 hat. Anschließend verwenden wir den Energiesatz, da der Reibungskoeffizient $\mu = 0$ ist und eine Höhendifferenz vorliegt. Als Ergebnis bekommen wir die zweite Geschwindigkeit v_2. Zum Schluss verwenden wir den Arbeitssatz, da hier Reibung vorliegt $\mu = \mu_G$ und somit erhalten wir die dritte Geschwindigkeit v_3.

Formeln:
- Impulssatz $\rightarrow m\,(\vec{v_1} - \vec{v_0}) = \int_{to}^{t} \sum \vec{F}\, dt$
- Energiesatz $\rightarrow E_{kin1} + \pi_1 = E_{kin2} + \pi_2$
- Arbeitssatz $\rightarrow E_{kin2} - E_{kin1} = W_{12}$; $W_{12} = W_{12}{}^{N} + W_{12}{}^{mg} + W_{12}{}^{R}$

IV) Lösung

Berechnung der Geschwindigkeit v_1 durch den Impulssatz (Schritt von 0 ⟶ 1)

```
Remove["Global`*"]

a01 = Solve[m * v0 == 5 * m * v1, v1]
```

$\{\{v1 \rightarrow \frac{v0}{5}\}\}$

```
v1 = a01[[1, 1, 2]]
```

$\frac{v0}{5}$

Berechnung der Geschwindigkeit v_2 durch den Energiesatz (Schritt von 1 ⟶ 2)

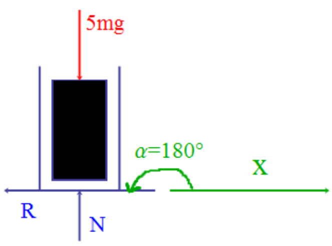
```
a02 = Solve[1 / 2 * 5 m * 1 / 25 * v0^2 + 5 m * g * (198 * v0^2)/(100 * g) == 1 / 2 * 5 m * v2^2, v2]
```

$\{\{v2 \rightarrow -2\,v0\}, \{v2 \rightarrow 2\,v0\}\}$

```
v2 = a02[[2, 1, 2]]
```

2 v0

Berechnung der Geschwindigkeit v_3 durch den Arbeitssatz (Schritt von 2 ⟶ 3)



Die Beschleunigung ist in y-Richtung y = 0

```
a03 = Solve[0 == N - 5 m * g, N]
```

$\{\{N \to 5\, g\, m\}\}$

```
Nk = a03[[1, 1, 2]]
```

$5\, g\, m$

```
R = μ * Nk
```

$5\, g\, m\, \mu$

$$W12 = \int_0^{L1} R * \text{Cos}[180\,°]\, dx$$

$-5\, g\, L1\, m\, \mu$

```
a04 = Solve[1 / 2 * 5 m * v3^2 - 1 / 2 * 5 m * 4 v0^2 == -5 L1μ * m * g, v3]
```

$\left\{\left\{v3 \to -\sqrt{2}\, \sqrt{-g\, L1\mu + 2\, v0^2}\right\}, \left\{v3 \to \sqrt{2}\, \sqrt{-g\, L1\mu + 2\, v0^2}\right\}\right\}$

```
Simplify[a04]
```

$\left\{\left\{v3 \to -\sqrt{-2\, g\, L1\mu + 4\, v0^2}\right\}, \left\{v3 \to \sqrt{-2\, g\, L1\mu + 4\, v0^2}\right\}\right\}$

```
v3 = a04[[2, 1, 2]]
```

$\sqrt{2}\, \sqrt{-g\, L1\mu + 2\, v0^2}$

V) Fazit

Besonders bei der Aufgabe wird das Anwenden des Impuls-, Energie- und Arbeitssatzes geübt. Die Stoßkraft $\vec{F}$ wird beim Impulssatz zu 0, da wir hier von einem “rein plastischen Stoß” ausgehen. (Beide Massen verbinden sich). Dies kann jedoch bei anderen Aufgaben nicht so vorkommen. Beim Energiesatz ist es wichtig wo man sein Nullpotenzial bzw. Koordinatenursprung $\pi = 0$ festlegt, da die Potentialdifferenz entscheidend ist. Je nachdem ändert sich das Vorzeichen (Oberhalb von $\pi = 0$ positiv unterhalb negativ). Beim Arbeitssatz wir die Reaktionskraft $N = 0$ angenommen, da die Kraft senkrecht steht leistet sie keinen Beitrag zur Arbeit. Reibung entsteht nur wenn ein Reibungskoeffizient μ vorhanden ist und zeigt immer entgegen der Relativgeschwindigkeit.
Die Reibkraft R wirkt gegen die Koordinatenrichtung x, dadurch entsteht $\cos(180\,°)$ welches -1 ergibt. Das Ergebnis wird negativ.
(Der Wagen verlangsamt sich).