TMIII: Klausuraufgabe D/2

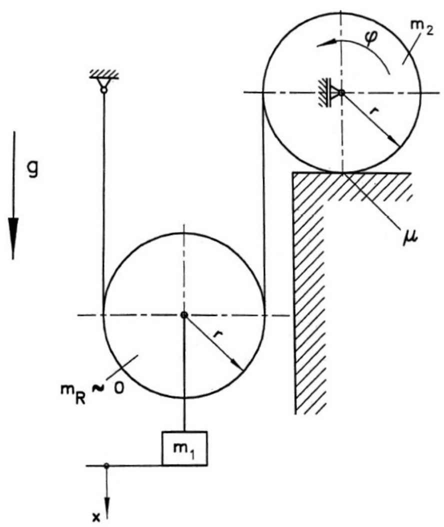
Kinematische Bindung zweier Rollen

I) Aufgabenstellung

Eine Masse m_1 hängt über einer losen Rolle mit vernachlässigbarem Gewicht (d.h. $m_R \approx 0$) an einem Seil, das auf einer zweiten Rolle (Masse: m_2) aufgewickelt ist. Die zweite Rolle ist vertikal geführt. Zwischen ihr und dem Boden herrscht Reibung (Reibungskoeffizient: μ). Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Masse m_1 losgelassen und wickelt das Seil von der anderen Rolle ab.

Gegeben:

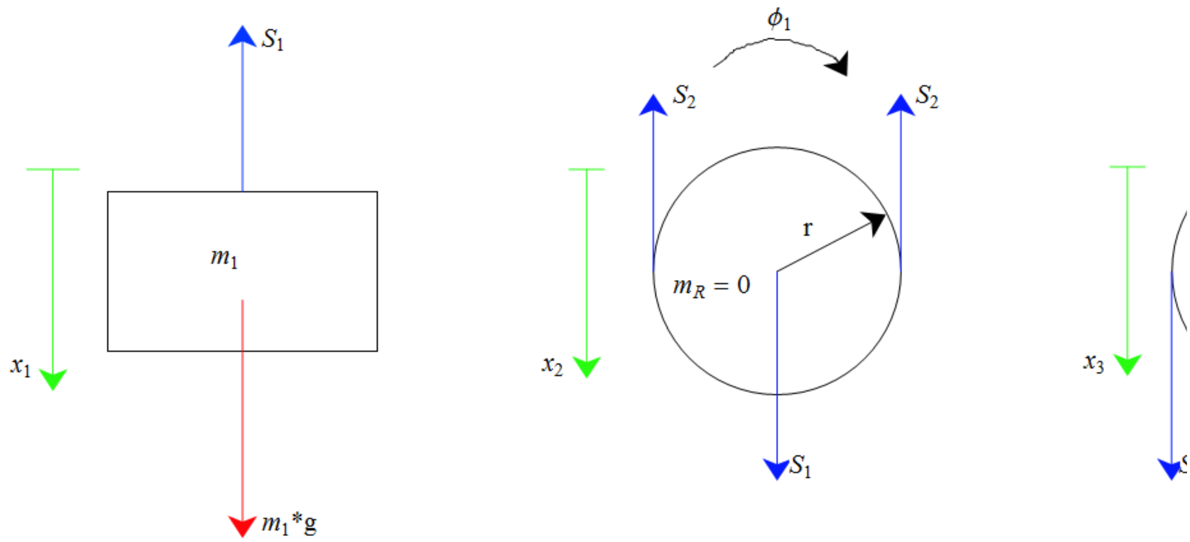
- Reibungskoeffizient: μ
- Massen: $m_1 = 4\,m, \quad m_2 = 3\,m, \quad m_R \approx 0$
- Erdbeschleunigung: g
- Radius: r



Aufgaben:

- a) Bestimmen Sie die Beschleunigung der Masse m_1.
- b) Wie groß darf der Reibungskoeffizient μ maximal sein, damit sich m_1 in Bewegung setzt?
- c) Das Seil ist zweimal um die Rolle gewickelt. Bestimmen Sie für $\mu = 0.2$ die Endgeschwindigkeit der Masse m_1.

II) Freikörperbild



III) Vorarbeit

Aus der Aufgabenstellung erkennen wir:

- Masse m_1

Die Masse m_1 führt nur translatorische Bewegungen aus und an ihr hängt das Seil S_1.

- Masse m_2

Trotz Reibung hat die Rolle einen Momentanpol, dieser befindet sich im Schwerpunkt. Wegen dem Lager sind die Beschleunigungen in den beiden Koordinatenrichtungen $\ddot{y} = 0$, $\ddot{x} = 0$. Durch die vertikale Führung drückt die Gewichtskraft der Rolle auf den Boden. Auf Grund der Gewichtskraft, Rotation und rauhen Oberfläche ensteht Reibung.

- Masse m_R

Aus der Skizze können wir schließen, dass sich der Momentanpol am linken Rand der Rolle befindet, da das Seil auf der linken Seite fest an der Wand gebunden ist. Desweiteren hängen an der Rolle beide Seile und die Masse m_R ist vernachlässigbar. Durch die rotatorische Bewegung der Masse m_2 rollt sich das Seil ab. Dadurch wird das Seil S_2 länger und somit bewegt sich die Masse m_R und die Masse m_1 abwärts.

- Zur Kinematik:

Auf Grund des Lagers führt die Masse m_2 eine rein rotatorische Bewegung um den Schwerpunkt aus. Deswegen bewegt sich das Seil S_2 mit der Geschwindigkeit $v_2 = r * \dot{\phi}_2$. Dadurch kennen wir auch die Geschwindigkeit am rechten Rand der Masse m_R. Da sich der Momentanpol am linken Rand der Rolle befindet und die Radien beider Rollen gleich sind ensteht dadurch die Bindung $v_2 = 2\, r * \dot{\phi}_1$.

Die Schwerpunktsgeschwindigkeit der Masse m_R ist gleich der Geschwindigkeit an der Masse m_1 $\longrightarrow v_1 = r * \dot{\phi}_1$

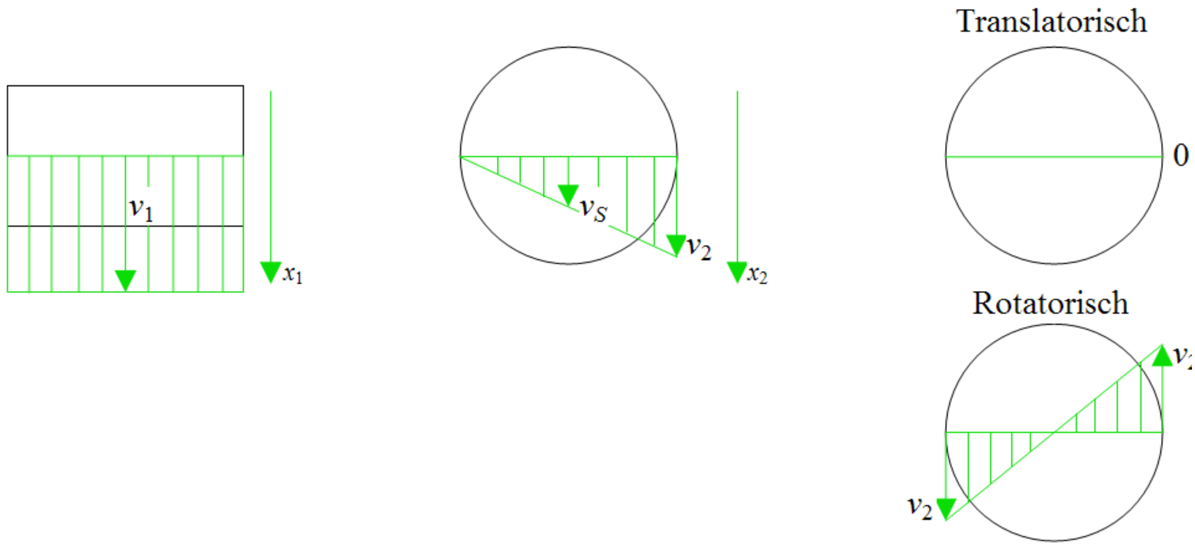
IV) Lösung

Hier $\ddot{x} = a$, $\dot{x} = v$, $x = s$

```
Remove["Global`*"]
```

Aufgabenteil a)

Zusammenhänge der Bewegungen




```
m1 = 4 * m
```

4 m

```
m2 = 3 * m
```

3 m

Zusammenhang zwischen φ_1 und φ_2

```
aϕ2 = 2 * aϕ1
```

2 aϕ1

Zusammenhang zwischen a_1 und φ_1

```
aϕ1 = a1 / r
```

$$\frac{a1}{r}$$

Berechnung von θ_2

```
Θ2 = 3 / 2 * m * r^2
```

$$\frac{3\, m\, r^2}{2}$$

Gleichungssystem lösen mit einsetzen und auflösen

```
u01 = Solve[m1 * a1 == m1 * g - S1, a1]
```

$$\left\{\left\{a1 \to \frac{4\ g\ m - S1}{4\ m}\right\}\right\}$$

```
a1 = u01[[1, 1, 2]]
```

$$\frac{4\ g\ m - S1}{4\ m}$$

```
u02 = Solve[-S2 * r + S3 * r == 0, S3]
```

$$\{\{S3 \to S2\}\}$$

```
S3 = u02[[1, 1, 2]]
```

$$S2$$

```
S1 = S2 + S3
```

$$2\ S2$$

```
u03 = Solve[m2 * g - Nk + S2 == 0, S2]
```

$$\{\{S2 \to -3\ g\ m + Nk\}\}$$

```
S2 = u03[[1, 1, 2]]
```

$$-3\ g\ m + Nk$$

```
u04 = Solve[θ2 * aϕ2 == -R * r + S2 * r, R]
```

$$\left\{\left\{R \to \frac{1}{2}\ (-21\ g\ m + 5\ Nk)\right\}\right\}$$

```
R = u04[[1, 1, 2]]
```

$$\frac{1}{2}\ (-21\ g\ m + 5\ Nk)$$

```
u05 = Solve[R == μ * Nk, Nk]
```

$$\left\{\left\{Nk \to -\frac{21\ g\ m}{-5 + 2\ \mu}\right\}\right\}$$

```
Nk = u05[[1, 1, 2]]
```

$$-\frac{21\ g\ m}{-5 + 2\ \mu}$$

```
S2
```

$$-3\ g\ m - \frac{21\ g\ m}{-5 + 2\ \mu}$$

```
S1
```

$$2\left(-3\ g\ m - \frac{21\ g\ m}{-5 + 2\ \mu}\right)$$

```
a1
```

$$\frac{4\,g\,m - 2\left(-3\,g\,m - \frac{21\,g\,m}{-5+2\,\mu}\right)}{4\,m}$$

Daraus folgt die Beschleunigung der Masse m_1

```
u06 = Simplify[a1]
```

$$\frac{g\,(-2+5\,\mu)}{-5+2\,\mu}$$

Aufgabenteil b)

Umstellen nach dem Reibungskoeffizienten μ mit Nullsetzen der Beschleunigung

```
u07 = Solve[a1 == 0, μ]
```

$$\left\{\left\{\mu \to \frac{2}{5}\right\}\right\}$$

Der Reibungskoeffizient muss < $\frac{2}{5}$ sein, damit sich die Masse m_1 in Bewegung setzt

```
μ1 = u07[[1, 1, 2]]
```

$$\frac{2}{5}$$

Aufgabenteil c)

Das Seil rollt von der Rolle m_2 zweimal ab. Dies ist der Weg den die Masse m_1 zurücklegt

$$\mu 2 = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5}$$

```
u08 = a1 /. μ → μ2
```

$$\frac{5\,g}{23}$$

Integrieren der Beschleunigung der Masse m_1 zu dessen Geschwindigkeit

```
v1 = Integrate[u08, t]
```

Nochmaliges Integrieren um zur Streckenfunktion zu gelangen

```
s1 = Integrate[v1, t]
```

$$\frac{5\,g\,t^2}{46}$$

Der Umfang der Rolle wird wie folgt berechnet

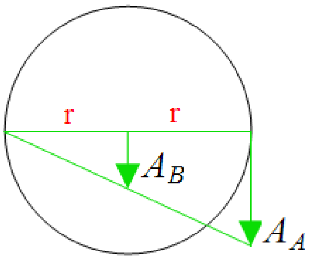
```
U = 2 * π * r
```

$2\,\pi\,r$

Da sich das Seil zweimal von der Rolle abwickelt, ist der Weg zweimal dem Umfang

```
L = 2 * U
```

$4\,\pi\,r$



Dies ist die Absenkung am Punkt A_A an der Rolle m_R

```
AA = L
```

$4\,\pi\,r$

Mit dem Strahlensatz wird die Absenkung am Punkt A_B berechnet, da dort die Masse m_1 dran hängt

$$u09 = \text{Solve}\left[\frac{AA}{2*r} == \frac{AB}{r}, AB\right]$$

$\{\{AB \to 2\,\pi\,r\}\}$

Somit folgt die Streck die die Masse m_1, infolge der Abwicklung des Seiles, zurücklegt

```
AB = u09[[1, 1, 2]]
```

$2\,\pi\,r$

Berechnung der Zeit, welche die Masse m_1 benötigt, bis die eben berechnete Strecke zurückgelegt ist

```
u10 = Solve[AB == s1, t]
```

$$\left\{\left\{t \to -\frac{2\sqrt{\frac{23\pi}{5}}\sqrt{r}}{\sqrt{g}}\right\}, \left\{t \to \frac{2\sqrt{\frac{23\pi}{5}}\sqrt{r}}{\sqrt{g}}\right\}\right\}$$

```
t1 = u10[[2, 1, 2]]
```

Einsetzen der berechneten Zeit in die Geschwindigkeitsfunktion und umstellen nach der Endgeschwindigkeit

```
u11 = Solve[v1 == vend, vend] /. t → t1
```

$$\left\{\left\{vend \to 2\sqrt{g}\sqrt{\frac{5\pi}{23}}\sqrt{r}\right\}\right\}$$

Das ist die Endgeschwindigkeit der Masse m_1, nach dem zurückgelegten Weg durch das Seilabrollen

```
vend = u11[[1, 1, 2]]
```

$$2\sqrt{g}\sqrt{\frac{5\pi}{23}}\sqrt{r}$$

V) Fazit

Der Fokus in dieser Aufgabe liegt in der Kinematischen Bindung und das Lösen des daraus entstehenden Gleichungssystems. Kinematische Bindungen sind in der Kinetik häufig anzutreffen. Deshalb ist es wichtig, dass man die Zusammenhänge durch die Bindung verstanden hat. Man muss sich immer überlegen, ob es ein Momentanpol gibt und wo er sich befindet. Außerdem wie die Schwerpunktsgeschwindigkeiten aussehen und wie man diese mithilfe des Momentanpols auf den Umfang umrechnet (Bspl. $x = r * \varphi$). Das Lösen des Gleichungssystems benötigt ein sauberes Arbeiten, da die Übersicht leicht verloren geht. Hier raten wir die schon benutzten Gleichungspaare farbig zu markieren.
Ein weiterer Teil der Kinetik ist das Aufstellen von Bedingungen. Im Aufgabenteil b) muss man sich fragen wann es keine Beschleunigung gibt und welchen Wert μ dabei annehmen muss.
Bei c) ist es wichtig, dass man versteht warum die abgerollte Seillänge am Umfang der Rolle m_R ist und dass man dann noch auf den Schwerpunkt der Rolle mittels Strahlensatz umrechnen muss. Denn die Masse m_1 hängt am Schwerpunkt der Rolle m_R.
Auch das Integrieren der berechneten Beschleunigungsfunktion und ausrechnen eines Zeitpunktes über die Streckenfunktion mit anschließendem Einsetzen in dessen Geschwindigkeitsfunktion ist oftmals Teil einer solchen Aufgabe.