Rechnen mit Potenzen

N bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen , **Q** die Menge der rationalen Zahlen und **R** die Menge der reellen Zahlen. $n \in$ **N** bedeutet: n ist eine natürliche Zahl.

Def. (Potenzen mit natürlichen Exponenten)
$a^n = a * a * .... * a$ [also n **gleiche Faktoren**] heißt n-te Potenz von a .
a heißt Basis, n heißt Hochzahl oder Exponent (**n** $\in$ **N**). $a^1 = a$. $0^n = 0$.

Satz ("Potenzgesetze"); Seien a , b $\in$ **R** ; k , n $\in$ **N**. Dann gilt:

1) $a^k * a^n = a^{k+n}$
2) $a^k : a^n = a^{k-n}$ (k > n)
3) $(a^k)^n = a^{k*n}$

Potenzen mit gleicher **Basis**

4) $a^n * b^n = (a\,b)^n$
$a^n / b^n = (a / b)^n$ für $b \neq 0$

Potenzen mit gleichem **Exponenten**

5) $\alpha\, a^n + \beta\, a^n = (\alpha + \beta)\, a^n$;
$a^n + b^n$ z.B. bleibt stehen

nur **Summanden** mit gleichen **<u>Potenzen</u>** können zusammengefasst werden ($\alpha, \beta \in$ **R**)

Bem.:

1) Alle Gesetze folgen aus der Definition, z.B. Gesetz 2:

$$\frac{a*a*\dots*a \quad (\text{k Faktoren})}{a*a*\dots*a \quad (\text{n Faktoren})} = a*\dots*a$$
(k - n Faktoren, nachdem man gekürzt hat ; k **>** n !!).

2) Potenzen (mit natürlichen Hochzahlen) sind **Abkürzungen für <u>Produkte</u>**.
Daher muss man bei der Manipulation von <u>Summen</u>, die Potenzen enthalten, aufpassen (Gesetz 5).

3) Beachten Sie bei den Gesetzen (1) – (3) die „Verschiebung“ der Rechenarten: aus dem <u>Produkt</u> der Potenzen wird im Ergebnis die <u>Summe</u> der Exponenten, usw. .

Bspl.: $2^{10} = 1024$; Informatik: 1024 Bytes werden als 1 **K**B bezeichnet (großes K) ; normalerweise steht die Vorsilbe „Kilo“ (k) für $1000 = 10^3$

$(2^3)^2 = 2^6 = 64$

$\left(\frac{1}{a^n}\right) = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$

$a^5 + b^5$ stehen lassen !!

Die obige Definition soll nun auf nicht-natürliche Exponenten **verallgemeinert** werden und zwar so, dass die Potenzgesetze ihre Gültigkeit behalten („Permanenz-Prinzip“) . Dabei werden wir sehen, dass man dann **Einschränkungen bei der Basis** vornehmen muss.

Def. (Potenzen mit nicht-positiven ganzzahligen Exponenten)

Für $a \neq 0$ legen wir fest: $a^0 = 1$; $a^{-n} = 1 / a^n$ ($n \in \mathbf{N}$) .

Die Potenz a^{-n} **wird also als Kehrwert von** a^n **definiert.**

Die Definition ist sinnvoll, denn: $1 = a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$, wenn man das Potenzgesetz (2) einfach verallgemeinert. $a = 0$ ist dann verboten (keine Division durch Null). Ebenso:

$1/a^n = a^0 : a^n = a^{0-n} = a^{-n}$. Aus $a^{-n} = 1 / a^n$ folgt unmittelbar: $1/ a^{-n} = a^n$.

Bspl.

$2^{-2} = 1/2^2 = 1/4$; $2^{-2} * 2^{-3} = 2^{-5} = 1/ 2^5 = \frac{1}{32}$

$(2^{-2})^{-3} = 2^6 = 64$; $1/ 10^{-3} = 10^3$

Def. (Wurzeln; Potenzen mit Stammbrüchen 1/n als Exponent)

Die **n-te Wurzel** aus einer <u>nichtnegativen</u> Zahl a ist diejenige <u>nichtnegative</u> Zahl x , für die gilt: $x^n = a$. Man schreibt $x = \sqrt[n]{a}$. a heißt jetzt Radikand. $\sqrt[n]{0} = 0$.

Man definiert: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$. **Potenzen mit Stammbrüchen als Exponent sind also Wurzeln**.

Die Def. von $a^{1/n}$ als $\sqrt[n]{a}$ ist sinnvoll, denn: $(a^{1/n})^n = a^{(1/n) * n} = a^{n/n} = a$, wenn man die Potenzgesetze auf gebrochene Exponenten erweitert. Eine Zahl, deren n-te Potenz a ergibt, ist laut Definition die n-te Wurzel aus a .

Beachten Sie, dass in dieser Definition <u>vereinbart</u> wird:

(1)

Radikanden sind stets nichtnegativ (d.h. ≥ 0), damit man IMMER die Wurzel ziehen kann. Aus negativen Zahlen kann man die n-te Wurzel nie ziehen, wenn n gerade ist.

Viele Mathematikbücher lassen die <u>n-te Wurzel aus einer negativen Zahl</u> zu, wenn <u>n ungerade</u> ist. Das ist völlig legitim, ABER: eine solche Wurzel kann nicht als Potenz mit gebrochenem Exponenten geschrieben werden: die Potenzgesetze gelten dafür nicht mehr! Bspl: - 2 wäre dann $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = ((-8)^2)^{1/6} = +2$, wenn man die Potenzgesetze weiter anwendet.

Die Potenzgesetze gelten nur <u>für a > 0</u> uneingeschränkt .

Wenn Wurzeln mit Hilfe eines Computerprogramms berechnet werden sollen, muss man sich für ein Vorgehen entscheiden und dieses konsequent beibehalten.

(2)

Wurzeln sind stets nichtnegativ, damit das Ergebnis EINDEUTIG ist.

Denn sonst könnte man z.B. für $\sqrt{4}$ wahlweise 2 oder -2 nehmen, denn beide Zahlen ergeben quadriert wieder 4 . Wenn man dann z.B. $\sqrt{61} + \sqrt{35}$ bestimmen soll, hätte man schon vier Möglichkeiten – und das sind drei zuviel.

Bspl.

a) $\sqrt[4]{16} = 2$, denn $2^4 = 16$. Die Gleichung $x^4 = 16$ hat aber **ZWEI** Lösungen, nämlich $x_1 = \sqrt[4]{16} = 2$, $x_2 = -\sqrt[4]{16} = -2$ **!**

$\sqrt[4]{-16}$ ist nicht definiert .

$\sqrt[3]{-8}$ ist (<u>nach obiger Definition</u>) nicht definiert, aber die Gleichung $x^3 = -8$ hat genau eine Lösung, nämlich $x = -2 = -\sqrt[3]{8}$ **!**

b) **Die sog. Wurzelgesetze sind die Potenzgesetze für gebrochene Exponenten:**

$\sqrt{2}\ \sqrt[3]{2} = 2^{1/2}\ 2^{1/3}$ (**gleiche Basis** !) $= 2^{1/2+1/3} = 2^{5/6} = (2^5)^{1/6} = \sqrt[6]{2^5}$.

allgemein: $\sqrt[k]{a}\ \sqrt[n]{a} = a^{1/k} * a^{1/n} = a^{1/k+1/n} = a^{\frac{n+k}{kn}} = \sqrt[kn]{a^{k+n}}$

$\sqrt{2}\ \sqrt{3} = 2^{1/2}\ 3^{1/2}$ (**gleicher Exponent** !) $= \sqrt{6}$;

allgemein: $\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = a^{1/n} * b^{1/n} = (a*b)^{1/n} = \sqrt[n]{(ab)}$.

c) $a^{0.4} = a^{4/10} = a^{2/5} = \sqrt[5]{a^2}$.

d) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{a+b}$, $\sqrt{a^2+b^2}$ **unverändert stehen lassen** !!!

e) $\sqrt{x^2} = x$ **nur für $x \geq 0$** : Quadrieren und Quadratwurzelziehen sind Umkehrungen voneinander, **solange man im Bereich nichtnegativer Zahlen bleibt**.

Bem.

1)
Potenzen mit negativen gebrochenen Exponenten erhält wieder über den entsprechenden Kehrwert:

$a^{-1/n} = 1 / a^{1/n} = 1/ \sqrt[n]{a}$

2)

Für a > 0 können auch Potenzen a^x mit beliebigen reellen Exponenten definiert werden, z.B. $a^{\sqrt{2}}$. **Die Potenzgesetze gelten für a > 0 uneingeschränkt** .

Bspl.

$a^{\sqrt{2}} * a^{\sqrt{2}} = a^{2\sqrt{2}}$; $(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = a^2$;

$(e^{-x})^2 = e^{-2x}$; $e^{-x^2} = e^{-x*x} = (e^{-x})^x$;

$(a^2)^{1/2} = a$; $a^{2^{1/2}} = a^{\sqrt{2}}$

$a^{-x} = 1/a^x$

Rechnen mit Logarithmen

Einführendes Bspl.:

$x = 2^3$; x wird durch Ausrechnen der Potenz ermittelt , $x = 8$.

$x^3 = 8$; x wird durch Wurzelziehen ermittelt, $x = \sqrt[3]{8} = 2$.

$2^x = 8$; x wird durch Logarithmieren ermittelt, $x = \log_2 8 = 3$.

Verallgemeinerung: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.

Def . (Logarithmus)
Wenn $a^x = b$, dann heißt x der **Logarithmus von b zur Basis a** .
Man schreibt: $x = \log_a (b)$. In Worten:
Derjenige Exponent, mit dem man a potenzieren muss, um b zu erhalten, heißt Logarithmus von b zur Basis a. b heißt in diesem Zusammenhang auch Numerus.
Für die Basis a wird vorausgesetzt: $a > 0$, $a \neq 1$; für den Numerus: $b > 0$.

Begründung der Einschränkungen für Basis und Numerus:
nach den Überlegungen im Rahmen der Potenzrechnung schließen wir nichtpositive Basen aus. $a = 1$ schließt man aus, da $1^x = 1$ für alle x . Ist die Basis positiv, kann auch die Potenz (hier Numerus b genannt) nur positiv sein.

Bspl.

$\log_5 (25) = 2$, denn $5^2 = 25$

$\log_9 (3) = 1/2$, denn $9^{1/2} = 3$

$\log_{10} (0.01) = -2$, denn $10^{-2} = 0.01$

$\log_{0.01} (10) = -1/2$, denn $0.01^{-1/2} = (10^{-2})^{(-1/2)} = 10$

$\log_a (1) = 0$, denn $a^0 = 1$

Bspl.

$10^{\log_{10} (3)} = 3$; $e^{\log_e (b)} = b$; $3^{\log_3 (10)} = 10$

Bem.

1)

Das vorhergehende Beispiel zeigt, dass **Logarithmieren und Exponieren zur selben Basis sich aufheben**, sie sind **Umkehrungen** zueinander. Dies folgt unmittelbar aus der Definition:

wenn $a^x = b$ (1) ,

dann gilt $x = \log_a(b)$ (2) .

Ersetzt man in (1) das x gemäß (2) , erhält man: $a^{\log_a(b)} = b$

2)

Der Ausdruck $\log_a(b)$ kann auch als „Handlungsvorschrift" aufgefasst werden:

„ logarithmiere b zur Basis a " , genau so wie der Ausdruck $(b)^2$ als „Handlungsvorschrift" aufgefasst werden kann: „quadriere b" .

Keinesfalls darf $\log_a(b)$ als Produkt von „$\log_a$" und „b" missverstanden werden.

3)

Wenn $a^{x_1} = a^{x_2} = b$ folgt : $x_1 = x_2 = x$, nämlich $x = \log_a(b)$.

Diese Eigenschaft heißt **Umkehrbarkeit** oder „<u>Ein</u>eindeutigkeit" der Exponential<u>funktion</u>.

Wenn $x = \log_a(b_1) = \log_a(b_2)$ folgt : $b_1 = b_2 = b$, nämlich $b = a^x$.

Diese Eigenschaft heißt **Umkehrbarkeit** oder „<u>Ein</u>eindeutigkeit" des Logarithmus, genauer gesagt der Logarithmus<u>funktion</u>.

Das ist nicht selbstverständlich: so folgt z.B. aus $(b_1)^2 = (b_2)^2$ NICHT: $b_1 = b_2$,

sondern: $b_1 = b_2$ ODER $b_1 = -b_2$!!

Die Begriffe „Funktion" , „Eindeutigkeit" und „<u>Ein</u>eindeutigkeit" werden in einem entsprechenden Kapitel der Vorlesung Mathematik 1 behandelt werden.

4)

Oft lässt man die Klammer um den Numerus weg: $\log_a b$

Satz (Logarithmengesetze)

1) $\log_a (u * v) = \log_a (u) + \log_a (v)$
2) $\log_a (u / v) = \log_a (u) - \log_a (v)$
3) $\log_a (u^v) = v * \log_a (u)$

Beachten Sie auch hier die „Verschiebung“ der Rechenarten.

Beweis:

Da die Logarithmen auch „nur“ Exponenten sind, folgen die Logarithmengesetze aus den Potenzgesetzen.

(1) Sei $x = \log_a (u) \Leftrightarrow u = a^x$ (Definition des Log.). Ebenso: $y = \log_a (v) \Leftrightarrow v = a^y$.

Dann: $u * v = a^x * a^y = a^{x+y}$ (Potenzgesetz) $\Leftrightarrow x + y = \log_a (u * v)$

(Def. des Log.: mit $x+y$ muss man a potenzieren, um $u * v$ zu erhalten) .

Da $x + y = \log_a (u) + \log_a (v)$, ergibt sich die Behauptung.

(3) Sei $x = \log_a u \Leftrightarrow u = a^x$. Dann gilt: $u^v = (a^x)^v = a^{x v}$ (Potenzgesetz)

$\Leftrightarrow x * v = \log_a (u^v)$.

(Def. des Log.: mit $x * v$ muss man a potenzieren, um u^v zu erhalten) .

Mit $x = \log_a (u)$ folgt die Behauptung.

(2) $\log_a (u / v) = \log_a (u * v^{-1}) = \log_a (u) + \log_a (v^{-1})$ (Log. - Gesetz 1)

$= \log_a (u) - \log_a (v)$ (Log. - Gesetz 3)

Def. (Spezielle Basen)

$\log_{10}(b)$ =: $\lg(b)$ heißt dekadischer Logarithmus (Zehnerlogarithmus) von b.

$\log_e(b)$ =: $\ln(b)$ heißt natürlicher Logarithmus von b ; e : Euler'sche Zahl.

$\log_2(b)$ =: lb (b) heißt Zweierlogarithmus von b (binärer Log.) .

Oft wird „log“ sowohl für „lg“ (einige Taschenrechner) als auch für „ln“ (z.B. in amerikanischer Literatur) genommen; „lb“ hieß früher „ld“ (log. dualis) .

Anwendung: Auflösen einer Exponentialgleichung

Bspl.:

$7^x = 8 \Rightarrow$ (laut Def.) $x = \log_7(8)$.

Um diesen Logarithmus (zur Basis 7) mit einem Taschenrechner numerisch zu bestimmen, muss man auf den Logarithmus zur Basis 10 bzw. e umformen (es sei denn, der Rechner kann auch Logarithmen zur Basis 7).

Dazu kann man zur Ausgangsgleichung zurückkehren und beide Seiten logarithmieren, z.B. zur Basis 10

$\lg(7^x) = \lg(8) \Rightarrow$ (Log. - Gesetz 3) $x \lg(7) = \lg(8) \Rightarrow x = \lg(8) / \lg(7)$.

(Hinweis: Logarithmieren von beiden Seiten einer Gleichung ist erlaubt – wegen der Eineindeutigkeit des Logarithmus)

Anwendung: Auflösen einer Logarithmengleichung

Bspl.:

$\lg(x) = 2 \Rightarrow$ (laut Def.) $x = 10^2$

oder

$\lg(x) = 2 \Rightarrow$ (Exponieren zur Basis 10) $10^{\lg(x)} = 10^2 \Rightarrow x = 10^2$

(Hinweis: Exponieren von beiden Seiten einer Gleichung ist erlaubt – wegen der Eineindeutigkeit der Exponentialfunktion)