

# Versuchsanleitung und Auswertung Holzbiegung

13.04.2007

## 0.1 Standardversuch

Da beim Pflanzenständer die Biegung eine der Hauptbelastungen ist, bietet sich hier als einfaches Modell die 3 Punktbiegung an (siehe Abbildung 1).

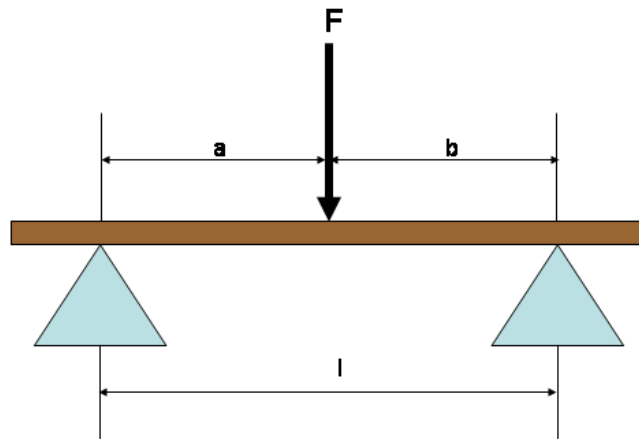


Abbildung 1: Schematisierter Versuchsaufbau

Da feuchtes Holz, was dem in der Natur vorkommenden Material entspricht, viskoelastisch ist, muss ein Messverfahren angewandt werden, um das stationäre vom Zeitverhalten zu separieren. Dies wird erreicht durch einen Durchbiegemodus gemäß Abbildung 2<sub>a</sub>.

Das Versuchsergebnis zeigt Abbildung 2<sub>b</sub>. Dies ist ein Kraft - Durchbiegungsdiagramm. Man sieht deutlich das Relaxieren des Materials an den Haltepunkten. Die Gleichgewichtselastizität muss zwischen den Haltepunkten für das Zustellen und Zurückfahren liegen, deshalb werden diese Punkte zur Bestimmung des Parameters  $E_{\infty}$  genutzt (vgl. Abschnitt 0.2).

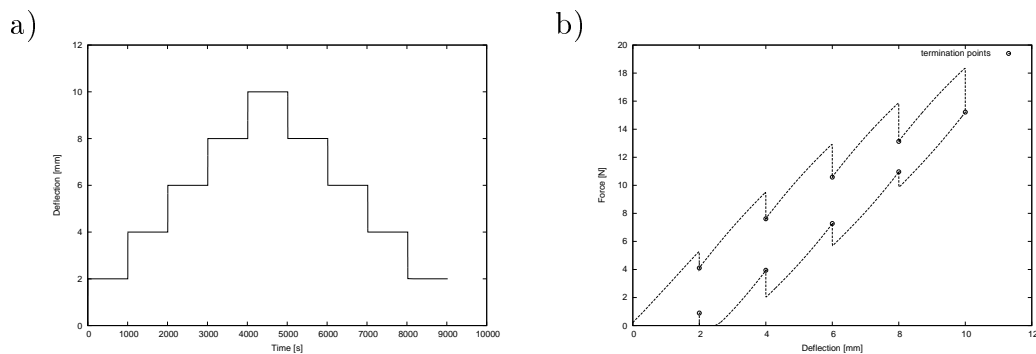


Abbildung 2: a) Versuchsmodus der Durchbiegung und b) Ergebnis

## 0.2 Bestimmen der Materialparameter

### 0.2.1 Berechnung des Versuchs für unterschiedliche Probengeometrien

Zur Berechnung der Materialparameter muss der Versuch mathematisch modelliert werden. Für das Moment gilt (vgl. Skript):

$$M_y(x, t) = -I_{yy}(x) w''(x) R(t) \quad (1)$$

mit dem Moment  $M_y(x, t)$ , dem Flächenträgheitsmoment  $I_{yy}(x)$ , der Durchbiegung  $w(x)$  und dem Stoffgesetz  $R(t)$ .

Für das Moment gilt:

$$M(x, t) = g(x) F(t)$$

Bei einer 3-Punkt-Biegung liegt ein 2-Feld-Problem (mit zwei Stetigkeitsbereichen) vor, so daß die Integration von (1) über  $x$  in beiden Feldern 2 Integrationskonstanten und damit insgesamt 4 Integrationskonstanten liefert.

Im Bereich I ( $0 \leq x \leq a$ ) gilt für  $g(x)$ :

$$g_I(x) = \frac{b}{a+b} x \quad (2)$$

Im Bereich II ( $a \leq x \leq b$ ) gilt für  $g(x)$ :

$$g_{II}(x) = \frac{a(a+b-x)}{a+b} \quad (3)$$

Unter Einbeziehung der unterschiedlichen Bereiche kann die Lösung von (1) mit den Definitionen  $\psi_j(x) \equiv \frac{g_j(x)}{I_{yy}(x)}$  und  $Y(t) \equiv \frac{F(t)}{R(t)}$  wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} w'_j(x, t) &= -Y(t) \int \psi_j(x) dx + c_n = L_j(x, t) + c_n \\ w_j(x, t) &= -Y(t) \int \left[ \int \psi_j(x) dx \right] dx + c_n x + c_{n+1} = L_j(x, t) + c_n x + c_{n+1} \end{aligned} \quad (4)$$

mit  $j = I, II$  und  $n = 1, 3$ .

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten können folgende Randbedingungen benutzt werden (siehe Skript):

$$w_I(0, t) = 0; w_{II}(a + b, t) = 0; w_I(a, t) = w_{II}(a, t); w'_I(a, t) = w'_{II}(a, t) \quad (5)$$

Durch die Randbedingungen (5) erhält man folgendes lineare Gleichungssystem ( $\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{b}$ ) für die Konstanten  $c$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a + b & 1 \\ -a & -1 & a & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_I(a, t) \\ -L_{II}(a + b, t) \\ L_I(a, t) - L_{II}(a, t) \\ L'_I(a, t) - L'_{II}(a, t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Zur Lösung von (6) bildet man die Inverse der Koeffizientenmatrix:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+b} & -\frac{1}{a+b} & -\frac{b}{a+b} \\ \frac{1}{a+b} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+b} & -\frac{1}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{1}{a+b} & 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \quad (7)$$

Die Inverse (7) multipliziert mit dem Ergebnisvektor aus (6) ergibt die Lösung für die Integrationskonstanten. Es können nun die Ergebnisvektoren für unterschiedliche Stammgeometrien erzeugt werden.

### Lösung für konstanten Querschnitt

Für konstanten Querschnitt gilt  $I_{yy}(x) = \text{const} = I$ . Daraus folgt für den Bereich I:

$$\begin{aligned} L'_I(x, t) &= \frac{F(t) b}{2 R(t) I_{yy} (a + b)} x^2 \\ L_I(x, t) &= \frac{F(t) b}{6 R(t) I_{yy} (a + b)} x^3 \end{aligned} \quad (8)$$

und für den Bereich II:

$$\begin{aligned} L'_{II}(x, t) &= \frac{F(t) a}{R(t) I_{yy}} x - \frac{F(t) a}{2 R(t) I_{yy} (a + b)} x^2 \\ L_{II}(x, t) &= \frac{F(t) a}{2 R(t) I_{yy}} x^2 - \frac{F(t) a}{6 R(t) I_{yy} (a + b)} x^3 \end{aligned} \quad (9)$$

Der Lösungsvektor des linearen Gleichungssystem ist:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{F(t) a (a + b)^2}{3 R(t) I_{yy}} \\ \frac{F(t) a^3}{3 R(t) I_{yy}} \\ -\frac{3 R(t) I_{yy}}{F(t) a^2} \\ -\frac{2 R(t) I_{yy}}{F(t) a} \end{pmatrix}$$

mit der Lösung:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{F(t) a b (a + 2 b)}{6 R(t) I_{yy} (a + b)} \\ c_2 &= 0 \\ c_3 &= -\frac{F(t) a (3 a^2 + 4 a b + 2 b^2)}{6 R(t) I_{yy} (a + b)} \\ c_4 &= \frac{F(t) a^3}{6 R(t) I_{yy}} \end{aligned} \quad (10)$$

Mittels der Prüfmaschine kann die Durchbiegung an der Stelle  $a$  und die dafür benötigte Kraft  $F(t)$  gemessen werden. Das heißt, für die Durchbiegung  $w(a, t)$  gilt:

$$w(a) = \frac{F(t) a^3 b}{6 R(t) I_{yy} (a + b)} - \frac{F(t) a^2 b (a + 2 b)}{6 R(t) I_{yy} (a + b)}$$

Mit einem kreisförmigen Querschnitt gilt für das Flächenträgheitsmoment  $I_{yy} = \frac{\pi}{64} d_0^4$ . Daraus folgt für die Kraft:

$$F(t) = c R(t) w(a, t) \quad (11)$$

wobei die Konstante  $c = \frac{3 \pi d_0^4 (a + b)}{64 a^2 b^2}$  nur von der Geometrie der Probe und der Aufnahme abhängig ist.  $d_0$  lässt sich aus den Mittelwerten der Durchmesser der Proben an den Stellen  $a, b$  und der Krafteinleitung berechnen.

Die Bestimmung der Parameter in  $R(t)$  erfolgt mittels der *Methode der kleinsten Fehlerquadrate* (siehe Abschnitt 0.2.2).

### 0.2.2 Bestimmung des Parameters $E_\infty$

Für einen konstanten Querschnitt ist  $R(t) = E_\infty + \sum_{j=1}^2 E_j e^{-\alpha_j t}$  mit  $\alpha_j = \frac{E_j}{\eta_j}$  (siehe Skript). Daraus folgt für (11):

$$F(t) = c w(a) \left( E_\infty + \sum_{j=1}^2 E_j e^{-\alpha_j t} \right) \quad (12)$$

Zur Bestimmung des Parameters  $E_\infty$  betrachtet man die Funktion (12) für  $t \rightarrow \infty$ . Daraus folgt:

$$F = c E_\infty w(a)$$

Diese Funktion ist somit linear in  $E_\infty$ . Für den optimalen Parameter  $E_\infty$  gilt also:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n (F_i - c E_\infty w_i(a))^2 \stackrel{!}{=} \min$$

Notwendige Bedingung für ein Minimum ist, dass  $\frac{d\chi^2}{dE_\infty} = 0$  ist. Daraus folgt für das optimale Modul:

$$E_\infty = \frac{\sum_i F_i w_i(a)}{c \sum_i w_i(a)^2} \quad (13)$$

Um die restlichen vier Parameter ( $E_1, E_2, \eta_1, \eta_2$ ) bestimmen zu können, benötigt man einen nichtlinearen Optimierungsalgorithmus.

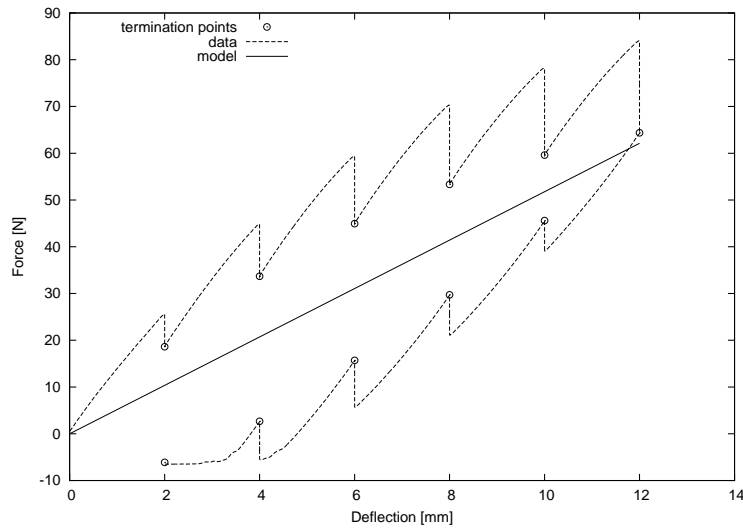


Abbildung 3: Ergebnis einer Parameterbestimmung für  $E_\infty$

### 0.2.3 Bestimmung der Zeitparameter

Zur Berechnung der Zeitparameter wird wieder das Minimum der Fehlerquadratsumme bestimmt. Es gilt:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left[ F_i - c w(a) \left( E_\infty + \sum_{j=1}^2 E_j e^{-\alpha_j t} \right) \right]^2 \stackrel{!}{=} \min \quad (14)$$

Da die Parameter  $\alpha_j$  in Funktion (14) in einer Exponentialfunktion stecken, ist (14) eine nichtlineare Funktion in diesen Parametern. Würde man das selbe Verfahren wie für Funktion (13) anwenden, so erhält man eine nichtlineares Gleichungssystem für die Materialparameter. Es ist deshalb sinnvoll

eine direktes Verfahren der nichtlinearen Optimierung anzuwenden. Das Verfahren, das hier angewand wird, ist der *Simplexalgorithmus* nach *Nelder & Mead*.

Abbildung 4 zeigt das Ergebnis eines Optimierungsprozesses.

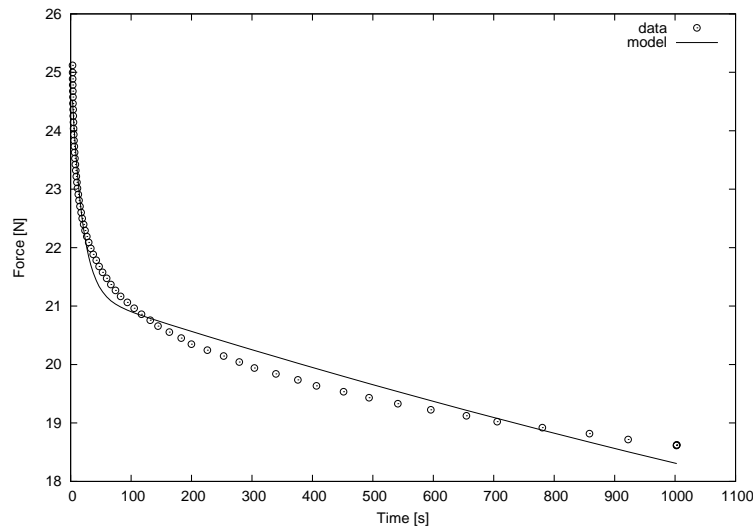


Abbildung 4: Ergebnis einer Parameteroptimierung für die Zeitparameter

## 0.2.4 Verfahren

### Bearbeiten der Messdaten

Die zur Auswertung benötigten Programme sind alle unter Linux lauffähig. Erzeugen sie für jede Messwertdatei ein eigenes Verzeichnis und fügen sie in jedes Verzeichnis eine Messwertdatei ein. Kopieren sie in jedes dieser Verzeichnisse die Programme *schnitt* und *e-un*. Öffnen sie eine shell und verzweigen sie in eines der Verzeichnisse. Führen das Programm *schnitt* aus, indem sie in der shell `./schnitt` ausführen.

Das Programm *schnitt* erzeugt eine neue Messwertdatei (*messwerte.dat*), das neben den Messwerten in der Spalte vier die Ableitung des Wegs nach der Zeit liefert. Die Datei *korridor.dat* liefert die Relaxationsabbruchpunkte und die Dateien *relnn.dat* enthalten die Relaxationswerte an den Haltepunkten.

Das Dateiformat ist in allen Dateien gleich. Die erste Spalte liefert die Zeit, die zweite die Kraft und die dritte den Weg.



## Bestimmen von $E_\infty$

Zur Bestimmung von  $E_\infty$  führen sie das Programm *e-un* aus. Die benötigte Messwertdatei ist *korridor.dat*. Die Eingaben für die Abstände  $a$  und  $b$  sowie für den mittleren Durchmesser  $d_0$  entnehmen sie bitte ihren Aufzeichnungen. Die Eingaben bitte in *mm*. Sie erhalten als Ausgabe den Parameter  $E_\infty$  in *MPa* und eine Datei (*plot.dat*), die ihnen die Funktion (11) an den Relaxationsabbruchpunkten ausgibt (1. Spalte Durchbiegung, 2. Spalte Kraft). Sie können diese Datei, *korridor.dat* und *messwerte.dat* zur grafischen Darstellung der Ergebnisse nutzen.

## Bestimmung der Zeitparameter

Zur Bestimmung der Zeitparameter müssen sie das Paket *rel.tar.gz* entpacken. Sie werden das Programm *sim* finden. Es dient zur Parameteridentifikation. Das Programm wird von einem Skript (*steuer.dat*) gesteuert. Die Messwertdatei muss immer *rel01.dat* sein, da nur beim ersten Relaxationsprozess die Zeitbedingungen definitionsgemäß sind. Weiterhin geben sie die Lagerabstände, den mittleren Durchmesser und  $E_\infty$  ein.

Um den Algorithmus starten zu können, brauchen sie Anfangsschätzungen der Parameter. Benutzen sie die Schätzwerte, die in der Datei stehen. Falls der Algorithmus nicht konvergiert, versuchen sie die Werte zu variieren. Braucht er viele Iterationsschritte, übertragen sie die Ergebniswerte der Parameter in die Steuerdatei und starten das Programm erneut.

Mit der mitgelieferten Plotdatei *plot.plt* können sie das Ergebnis visualisieren (siehe Abbildung 4). Sie können dazu die Datei *plot.dat* nutzen. Sie enthält die Messwerte Zeit und Kraft in den ersten beiden Spalten. Die dritte Spalte die vom Modell bestimmten Kraftwerte.

## Nachbilden der Kraft-Weg-Kurve

Mit all den Größen, die sie bisher berechnet haben, können sie mit dem Paket *holzfunktion.tar.gz* den aufsteigenden Ast der Kraft-Weg-Kurve aus Abbildung 3 nachfahren. Sie benötigen dazu noch die Zeit aus der Messwertdatei, wo der aufsteigende Ast in den fallenden Ast übergeht. Das Programm *holz* liefert eine Ergebnisdatei *funktion.dat*, das in der ersten Spalte die Prozesszeit, in der zweiten Spalte die durch das Modell errechnete Kraft und in der dritten Spalte den Weg beinhaltet. Sie können diese Datei gegen die Messwertdatei auftragen (siehe Abbildung 5).

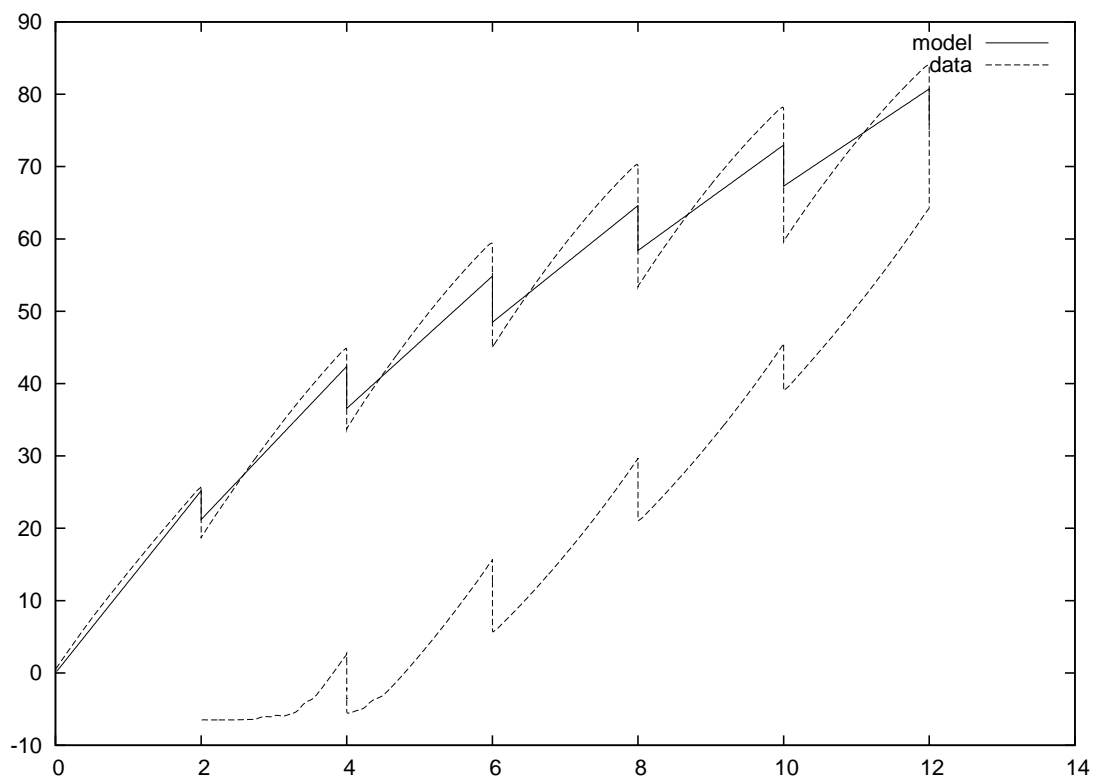


Abbildung 5: Vergleich zwischen Messwerten und viskoelastischen Modell