

**Rudimentär-Skript zur**  
**LV „Biomaterialien“**  
**Kontinuumsmechanische Beschreibung von Biomaterialien**

G. Silber

---

Im Folgenden wird versucht, mit (etwas) kontinuumsmechanischen Methoden experimentelle Befunde von Holzwerkstoffen sowie menschlicher Gewebematerialien (Gefäßmaterial) zu beschreiben und auszuwerten. In der LV werden die folgenden Lehrbücher zugrundegelegt:

- [1] **Lehrbuch:** Silber, G., Steinwender, F., Bauteilberechnung und Optimierung mit der FEM –Materialtheorie, Anwendungen, Beispiele, Teubner (2005)
- [2] **Lehrbuch:** Kühhorn, A., Silber, G., Technische Mechanik für Ingenieure – Grundlagen für Studium und Praxis, Hüthig (2000)
- [3] **Formelsammlung:** Silber, G., Kühhorn, A., Technische Mechanik –Formelsammlung und Leitfaden, Fachhochschulverlag, Band 84 (1996)
- [4] **Lehrbuch:** Gummert, P., Reckling, K.-A., Mechanik, Vieweg (1986)
- [5] **Lehrbuch:** Technische Mechanik 4, Gross, D., Hauger, W., Schnell, W., Wriggers, P., Springer (1993)
- [6] **Lehrbuch:** Wriggers, P., Nichtlineare Finite-Element-Methoden, Springer (2001)
- [7] **Lehrbuch:** Parisch, H., Festkörper-Kontinuumsmechanik, Teubner (2003)

Hinweise für dieses Rudimentär-Skript:

- Das Skript ist eine (Kurz-)Kurz-Fassung der entsprechenden Kapitel/Abschnitte/Unterabschnitte von [1].
- Die Formelnumerierung ist identisch mit derjenigen aus [1]. Wenn analoge Formeln entwickelt werden, so steht hinter den Formelnumerierungen ein x bzw. y. Da der Text in diesem Skript nicht mit demjenigen von [1] übereinstimmt, kommt es vor, daß die Formelnumerierung nicht chronologisch durchlaufend ist!
- Sind Berechnungen vom Studierenden selbst auszuführen, so ist dies im Text gekennzeichnet.

## 1 Experimentelle Befunde

Diese liegen auf Basis der vorangegangenen Lehrveranstaltungen (Dipl.-Biol. G. Benderoth) in Form von Kraft-Verformungs-Daten sowie Kraft-Zeit-Daten vor (Kraft-Durchbiegungs-Daten im Falle von Holz und Kraft-Dehnungs-Daten im Falle von Gefäßmaterial).

Auf den „ersten Blick“ läßt sich den Kraft-Verformungs-Daten generell entnehmen, daß eine Verbindung etwa sämtlicher „Mittelungen“ der Relaxationsabbruchpunkte des jeweiligen Be- und Entlastungspfades (der Korridor stellt quasi eine Gleichgewichtselastizität nach Relaxation dar!) **nicht** durch eine Gerade bewerkstelligt werden kann. Somit scheidet zur Beschreibung des Kraft-Verformungs-Verhaltens die Materialgleichung in Form des (streng-)linearen HOOKEschen Materialgesetzes a priori aus, so daß ein anderes adäquates Materialgesetz, welches einen nicht-linearen Zusammenhang zwischen den Verzerrungen (Dehnungen) und Spannungen besitzt, aufzudecken ist. Hierfür sind generell nicht-lineare Verzerrungsmaße zu definieren, so daß man statt der streng-linearen HOOKEschen Relation

$$\sigma = E\varepsilon$$

etwa

$$\sigma = f(\varepsilon) = \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \dots +$$

also beispielsweise ein Polynom in der Dehnung  $\varepsilon$  ansetzen würde. Allerdings hat eine solche Stoffgleichung bestimmten Regeln (Prinzip der Rationalen Mechanik) zu gehorchen und kann nicht so ohne Weiteres formuliert werden (vgl. hierzu Abschnitt 2.1)!

## 2 (Etwas) Kontinuumsmechanik

### 2.1 Materialgleichungen

Vgl. [1] Seite 29 ff, Abschnitt „2.1.6 Materialgleichungen“

Die Erfahrung lehrt, daß sich beispielsweise ein Gummifaden leichter ziehen (dehnen) läßt, als ein Draht mit gleicher Geometrie (Durchmesser). Daher muß ein materialspezifischer Zu-

sammenhang zwischen Belastung und Verformung bzw. zwischen Spannungen und Dehnungen existieren. Solche Verknüpfungen zwischen kinematischen und dynamischen Größen (Dehnungen, Spannungen) heißen *Materialgleichungen*, *konstitutive Gleichungen* oder *Materialgesetze*, die den folgenden Prinzipien der Rationale Mechanik gehorchen müssen:

- Prinzip der Kausalität
- Prinzip des Determinismus
- Prinzip der materiellen Objektivität
- Prinzip der lokalen Nachbarschaft
- Prinzip der Äquipräsenz

**Prinzip des Determinismus:** „Alles hängt noch von Allem ab“

$$\sigma(X, t) = \int_{\tau=-\infty}^t \langle \chi(Y, \tau), X, t \rangle_{X, Y \in \text{Stab}} \quad (2.15)$$

**Prinzip der materiellen Objektivität:** Funktional hängt nur noch von der **Differenz**-Geschichte und damit von der Relativbewegungen ab

$$\sigma(X, t) = \int_{\tau=-\infty}^t \langle \chi(Y, \tau) - \chi(X, \tau) \rangle_{X, Y \in \text{Stab}} \quad (2.16)$$

**Materialien vom Grade N:** Differenzgeschichte wird als TAYLOR-Reihe aufgeschrieben

$$\begin{aligned} \chi(Y, \tau) &= \chi(X + \Delta X, \tau) = \chi(X, \tau) + \frac{\partial \chi(X, \tau)}{\partial X} dX + \dots = \\ &= \chi(X, \tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \chi(X, \tau)}{\partial X^k} (dX)^k \end{aligned} \quad (2.17)$$

womit sich (2.16) schreiben läßt

$$\sigma(X, t) = \int_{\tau=-\infty}^t \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \chi(X, \tau)}{\partial X^k} (dX)^k \right\rangle \quad (2.18)$$

oder

$$\sigma(X, t) = \int_{\tau=-\infty}^t \left\langle \frac{\partial \chi(X, \tau)}{\partial X}, \frac{\partial^2 \chi(X, \tau)}{\partial X^2}, \dots, \frac{\partial^k \chi(X, \tau)}{\partial X^k}, \dots \right\rangle \quad (2.19)$$

Mit der Definition des Deformationsgradienten (Konfigurationsgradient)

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} \equiv \frac{\partial \chi(X, t)}{\partial X} \quad (2.8)$$

geht (2.19) schließlich über in ein Funktional des Deformationsgradienten und seiner Orts-Ableitungen:

$$\sigma(X, t) = \int_{\tau=-\infty}^t \left\langle \underbrace{F(X, \tau), \frac{\partial F(X, \tau)}{\partial X}, \dots, \frac{\partial^{N-1} F(X, \tau)}{\partial X^{N-1}}}_{\text{Materialien vom Grade } N}, \dots \right\rangle \quad (2.20)$$

**Prinzip der lokalen Nachbarschaft (Materialien vom Grade Eins):** Funktional hängt nur noch vom Deformationsgradienten selbst ab

$$\sigma(X, t) = \int_{\tau=-\infty}^t \langle F(X, \tau) \rangle \quad (2.21)$$

Das Funktional (2.21) gilt etwa für **Materialien mit Gedächtnis**, wobei das Funktional dann beispielsweise in ein Integral wie folgt übergeht:

$$\sigma(X, t) = \int_{\tau=-\infty}^t f[F(X, \tau)] d\tau \quad (2.21y)$$

Anwendung: Beispielsweise lineare Viskoelastizität von Holzmaterialien

**Materialien ohne Gedächtnis:** Funktional geht über in eine Funktion

$$\sigma(X, t) = f[F(X, t)] \quad (2.22)$$

Mit der Beziehung

$$\varepsilon(X, t) \equiv \frac{\partial u}{\partial X} = F(X, t) - 1 \quad (2.10)$$

läßt sich (2.22) auch schreiben als

$$\boxed{\sigma(X,t) = g[\varepsilon(X,t)]} \quad (2.23)$$

Anwendung: Nicht-lineare Hyperelastizität von Biomaterialien

**HOOKEsches Materialgesetz der streng-linearen Elastizitätstheorie:** Die Funktion  $g$  in (2.23) geht über in eine Proportionalitätskonstante (etwa Elastizitätsmodul), womit ein streng-linearer Zusammenhang zwischen der Spannung und der Dehnung hergestellt ist:

$$\sigma(X,t) = E\varepsilon(X,t) \quad (2.24)$$

## 2.2 (Streng-)Lineare Biege-Viskoelastizität (Holzmaterialien)

Die Experimente an Holzwerkstoffen wurden auf Basis von Biegeversuchen (Drei-Punkt-Biegung) erstellt, so daß zur Materialmodellierung (Materialidentifikation) eine Biegetheorie zugrunde zu legen ist. Eigentlich ist der Zusammenhang zwischen Kraft und Durchbiegung gemäß der Experimentalkurven nicht-linear, so daß auf eine nicht-lineare Theorie zurückgegriffen werden müßte. Um einerseits den zeitlichen Rahmen nicht zu sprengen und andererseits die Methode zu demonstrieren, wird jedoch zunächst auf eine lineare Theorie Bezug genommen, womit natürlich auch nur genau diejenigen Versuchsdaten beschrieben werden können, die in einem linearen Zusammenhang stehen! Es wird also eine Materialgleichung der Art

$$F(t) = f[w(x_0), t]$$

gesucht, worin  $F$  die Belastung (Einzelkraft) und  $w_0$  die Durchbiegung an der Krafteinleitungsstelle bedeuten.

## 2.2.1 Biegeproblem

Vgl. [1] Seite 216 ff, Unterabschnitt „5.2.2 Biegeproblem“

Vgl. [2] Seite 360 ff, Unterabschnitt „3.3.3 Ebene oder einachsige Balkenbiegung“

Elastische Biegelinie (Voraussetzung ist das HOOKEsche Materialgesetz):

$$\boxed{M_y(x) = -EI_{yy} \frac{d^2 w(x)}{dx^2}} \quad (5.27)$$

Materialgesetz für viskoelastische Materialien in allgemeiner (eindimensionaler) Form:

$$\sigma(t) = R(0)\varepsilon(t) - \int_{\tau=0}^t \dot{R}(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \quad (3.279)$$

bzw. mit Indizes

$$\boxed{\sigma_{xx}(t) = R(0)\varepsilon_{xx}(t) - \int_{\tau=0}^t \dot{R}(t-\tau)\varepsilon_{xx}(\tau)d\tau} \quad (3.279y)$$

Viskoelastische Biegelinie:

$$\boxed{M_y(x,t) = -R(0)I_{yy}(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \int_{\tau=0}^t I_{yy}(x) \dot{R}(t-\tau) \frac{\partial^2 w(x,\tau)}{\partial x^2} d\tau} \quad (5.46)$$

Beispiel: Mit der Relaxationsfunktion des HOOKE-Modelles nämlich (vgl. (3.169) Seite 152)

$$R(t) := \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E = \text{const. gilt} \quad R(t-\tau) = E \quad \text{und} \quad \dot{R}(t-\tau) = 0$$

womit (5.46) in (5.27) übergeht!

## 2.2.2 Biege-Relaxation

Vgl. [1] Seite 379 ff, Abschnitt „8.5 Balken unter konstanter Verformung“

Zeitlich konstante Verformung  $w(x,t) \stackrel{!}{=} w(x)$  die nur noch vom Ort abhängen kann, so daß auch deren Ableitungen nur noch reine Ortsfunktionen sind:

$$\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} := w''(x) \quad (8.74)$$

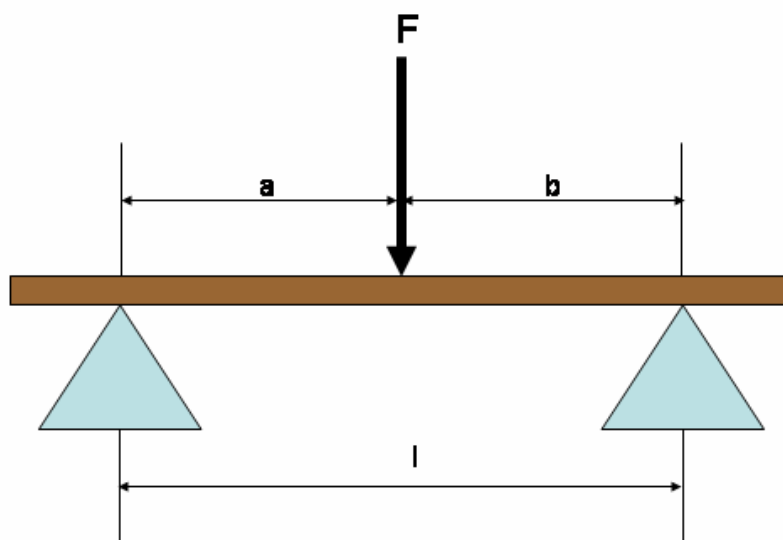
Damit ergibt sich aus (5.46) nach Ausführen der Integration

$$M_y(x,t) = -\underbrace{I_{yy}(x)}_{\Theta(x)} w''(x) R(t) \quad (8.75)$$

Ergebnis: Biegemoment  $M_y(x,t)$  eines durch eine zeitlich konstante Verformung (Durchbiegung) beanspruchten viskoelastischen balkenartigen Bauteiles ist Produkt aus reiner Ortsfunktion  $\Theta(x)$  des *elastischen* Balkens und *beliebiger* Relaxationsfunktion  $R(t)$  des *viskoelastischen* Balkens.

Im allgemeinen ist die Verformung  $w$  und nicht die zweite Verschiebungsableitung  $w''$  vorgegeben, deshalb muß erst nach  $w$  umgestellt und über  $x$  integriert werden, um die Durchbiegung  $w$  selbst in die Gleichung zu bekommen:

$$w''(x) = -\frac{M_y(x,t)}{R(t)I_{yy}(x)} \equiv -\frac{M_y(x,t)}{I_{yy}(x)} \frac{1}{R(t)} \quad (8.76)$$



**Bild 8.15x:**

Drei-Punkt-Biegung eines Balkenträgers, schematisch (2-Feld-Problem)

**Drei-Punkt-Biegung:** Bei einer 3-Punkt-Biegung liegt ein 2-Feld-Problem (mit zwei Stetigkeitsbereichen) vor, so daß die Integration von (8.76) über  $x$  in beiden Feldern 2 Integrationskonstanten und damit also insgesamt 4 Integrationskonstanten liefert. Die dafür erforderlichen vier Rand- und Übergangsbedingungen lauten, sofern man a priori infolge geometrischer Imperfektionen beim Experiment von einer Asymmetrie hinsichtlich des Kraftangriffspunktes der Einzellast ausgeht und noch  $l = a + b$  berücksichtigt:

$$\boxed{\begin{array}{l} w_I(x=0,t)=0 \quad , \quad w_I(x=a,t)=w_{II}(x=a,t) \\ w_{II}(x=l,t)=0 \quad , \quad \left. \frac{\partial w_I(x,t)}{\partial x} \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial w_{II}(x,t)}{\partial x} \right|_{x=a} \end{array}} \quad (8.89x)$$

Experiment: Während des Relaxations-Versuches wurde die Durchbiegung  $w_I$  an der Stelle  $x = a$  kontrolliert (konstant gehalten) und die Kraft  $F(t)$  über der Zeit gemessen, so daß zur wei-



teren Auswertung allein das Biegemoment  $M_{yI}$  an dieser Stelle heranzuziehen ist. Insbesondere ergibt sich dann für den Bereich I unter Beachtung von (8.77) und (8.78)<sub>2</sub>:

**Bereich I:  $0 < x < a$**

$$M_{yI}(x,t) = g_I(x)L_I(t) \quad \text{mit} \quad g_I(x) \equiv \frac{b}{a+b}x \quad , \quad L_I(t) \equiv F(t) \quad (8.90x)$$

$$\Psi_I(x) = \frac{g_I(x)}{I_{yyI}} \equiv \frac{a}{a+b} \frac{x}{I_{yyI}} \quad , \quad Y_I(t) = \frac{L_I(t)}{R(t)} \equiv \frac{F(t)}{R(t)} \quad (8.91x)$$

und speziell für den Bereich II unter Beachtung der Abkürzungen (8.91x)

$$\begin{aligned} w_I(x) &= -Y_I(t) \int \left[ \int \Psi_I(x) dx \right] dx + C_1' x + C_2' \\ &= -\frac{a}{a+b} \frac{F(t)}{R(t) I_{yyI}} \int \left[ \int x dx \right] dx + C_1' x + C_2' = \\ &= -\frac{a}{a+b} \frac{F(t)}{6R(t) I_{yyI}} x^3 + C_1' x + C_2' \end{aligned} \quad (8.93x)$$

Werden mit Hilfe der Randbedingungen (8.89x) sämtliche vier Integrationskonstanten  $C_i^j$  ( $i = 1,2; j = I, II$ ) (und damit auch die beiden in (8.93x) auftretenden Konstanten) bestimmt, so führt Umstellen von (8.93x) nach  $F(t)$  und Setzen von  $x = a$  zunächst auf.

Anmerkung: Wie gemäß (8.76) zu sehen ist, läßt sich unter Beachtung von (8.90x)  $w''$  wieder als Produkt aus einer reinen Ortsfunktion  $f(x)$  und einer reinen Zeitfunktion  $1/R(t)$  darstellen, so daß die Integration aus geeigneten Tabellenwerken oder Lehrbüchern entnommen werden kann. So findet man etwa in [2] S. 422 für den vorliegenden Fall der Drei-Punkt-Biegung

$$w_I(x) = \frac{Fb}{6EI_{yyI}} \frac{l^2 - b^2 - x^2}{l} x \quad (*)$$

woraus sofort unter Beachtung von  $F = F(t)$ ,  $l = a + b$  sowie der Tatsache, daß  $E$  durch  $R(t)$  zu ersetzen ist, schließlich folgt

$$F(t) = 3 \frac{a+b}{a^2 b^2} I_{yyI} w_I(x=a) R(t) \quad (8.94x)$$

Das Relaxationsverhalten der Struktur (Balken) kann beispielsweise mit Hilfe des generalisierten MAXWELL-Modelles (3.270) abgebildet werden, wobei der Einzeldämpfer jedoch fortgelassen ( $\eta_0 \equiv 0$ ) und die Reihe bei  $N = 2$  abgebrochen wurde, so daß damit die Relaxationsfunktion  $R(t)$  in (8.93x) insgesamt fünf Materialparameter  $E_\infty$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  besitzt und wie folgt lautet:

$$R(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^2 E_i e^{-\alpha_i t} \quad \alpha_i := \frac{E_i}{\eta_i} > 0 \quad (8.95x)$$

Einsetzen von (8.95x) in (8.94x) führt unter Beachtung des Flächenträgheitsmomentes für Kreisquerschnitte  $I_{yyI} = \pi R^4/4$  schließlich auf die folgende Zeitfunktion für die Belastung  $F(t)$

$$F(t) = \frac{3}{4} \pi \frac{a+b}{a^2 b^2} R^4 w_I(x=a) \left( E_\infty + \sum_{i=1}^2 E_i e^{-\alpha_i t} \right) \quad (8.96x)$$

Mit den Daten für die Abstände  $a$  und  $b$  sowie den Radius  $R$  und den gemessenen Größen  $w_I(x = a)$  und  $F(t)$  sind die im rechten Klammerausdruck in (8.96x) stehenden Materialparameter  $E_\infty$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  etwa mittels des numerischen Optimierungsalgorithmus Simplex zu berechnen (siehe Versuchsanleitung).

### 2.3 Nicht-lineare Hyperelastizität (menschliche Gefäßmaterialien)

Die experimentellen Befunde von Gefäßwandmaterial wurden auf Basis von Zugversuchen gewonnen, so daß zur Materialmodellierung (Materialidentifikation) eine Materialgleichung der Art

$$K = f(\lambda) \quad (*)$$

gesucht, worin  $K$  die Zugkraft (Einzelkraft) und  $\lambda := l(t)/l_0$  die Streckung bedeuten. Die Streckung  $\lambda$  läßt sich wie folgt aus der Dehnung  $\varepsilon$  gewinnen:

$$\varepsilon(t) = \frac{\Delta l(t)}{l_0} \equiv \frac{l(t) - l_0}{l_0} \equiv \frac{l(t)}{l_0} - 1 \equiv \lambda(t) - 1 \quad (**)$$

#### 2.3.1 Spannungsmaße

**Vgl. [1] Seite 28 ff, Unterabschnitt „2.1.5 Spannungsmaße“**

**Nominal-, Nenn- oder Erste PIOLA-KIRCHHOFFsche Spannung:** Hierbei wird die (Längs-)Kraft  $K$  auf die Querschnittsfläche  $A_0$  der Zugprobe (in der Bezugskonfiguration BKFG) bezogen, so daß

$$P^I = \frac{K}{A_0} \quad (2.12)$$

**Wahre oder CAUCHYsche Spannung:** Hierbei wird die (Längs-)Kraft  $K$  auf die *aktuelle* Querschnittsfläche  $A$  (in der Momentankonfiguration MKFG) bezogen, so daß

$$\sigma = \frac{K}{A} \quad (2.13)$$

Der Vergleich von (2.12) und (2.13) liefert die Zusammenhänge zwischen den beiden Spannungsmaßen

$$P^I = \frac{K}{A_0} \equiv \frac{A}{A_0} \frac{K}{A} \equiv \frac{A}{A_0} \underbrace{\frac{K}{A}}_{\sigma} = \frac{A}{A_0} \sigma \quad \text{bzw.} \quad \sigma = \frac{A_0}{A} P^I \quad (2.14)$$

*Hinweis:* Es sei betont, daß die Zusammenhänge (2.14) im allgemeinen dreidimensionalen Fall **keine** Gültigkeit mehr haben!

### 2.3.2 Materialgleichungen

**Verzerrungsenergiefunktion (spezifische Formänderungsenergie):** Für den Fall der GREEN- oder Hyperelastizität stellt die spezifische Formänderungsenergie (Verzerrungsenergiefunktion) (Vgl. [4] Seite 408 ff, [5] Seite 102))

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ji} \quad (\text{a})$$

ein Potential für die Spannungen dar, das bedeutet, daß die Spannungen durch Differentiation von  $w$  nach den Verzerrungen ermittelt werden können. Es gilt also allgemein

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{b})$$

**Beispiel (HOOKE-Material):** Der Spannungs- und Verzerrungszustand eines HOOKE-Materials für eine reine Zugbelastung (Zugversuch) ist wie folgt gegeben, sofern die 1-Richtung die Belastungsrichtung ist (HOOKEsches Materialgesetz):

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \quad , \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \end{aligned} \quad (3.153)$$

Wird dieser Spannungs- und Verzerrungszustand jeweils in Form einer Matrix (Tensor) dargestellt, so ergibt sich der Spannungs- und infinitesimale Verzerrungstensor (Deformator) zu

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \langle \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \rangle \quad [\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \langle \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \rangle \quad (\text{c})$$

Nach Vorschrift (a) ergibt sich mit (c) die folgende Verzerrungsenergiefunktion

$$w = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \sigma_{11} \varepsilon_{11} = \frac{1}{2} E \varepsilon_{11}^2 \quad (d)$$

Differentiation von (d) gemäß (b) nach der Dehnung  $\varepsilon_{11}$  liefert die einzige Spannung ( $i=j=1$ )

$$\sigma_{11} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{11}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{11}} \left( \frac{1}{2} E \varepsilon_{11}^2 \right) = \frac{1}{2} E \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\varepsilon_{11}^2) = E \varepsilon_{11} \quad (e)$$

wonach sich also wieder das HOOKEsche Materialgesetz für die Zugspannung ergibt. Im Falle der nicht-linearen (Hyper-)Elastizität können die CAUCHYschen Spannungen nach der folgenden Vorschrift erzeugt werden (Spektraldarstellung):

$$\mathbf{S} = J^{-1} \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial w}{\partial \lambda_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \quad J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (3.124)$$

Beim Zugversuch sollen die Hauptrichtungen als identisch mit einem raumfesten Basissystem angenommen werden, so daß  $\mathbf{n}_i = \mathbf{e}_i$  gilt. Wird der Spannungstensor ebenfalls im festen Basissystem dargestellt, so erhält man aus (3.124) nach Koordinatenvergleich schließlich die Koordinatengleichungen

$$\sigma_i = J^{-1} \lambda_i \frac{\partial w}{\partial \lambda_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.124x)$$

Für inkompressible Materialien gilt

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (e)$$

Weiterhin ist im Falle inkompressibler Materialien den Spannungen jeweils ein „hydrostatischer Druckanteil“ zuzufügen (Zwangs-Spannungstensor), welcher nicht über die Deformationen des Materials berechenbar, sondern aus Randbedingungen ermittelt werden muß, so daß damit (3.124x) übergeht in (Vgl. [6] Seite 49)

$$\sigma_i = p + \lambda_i \frac{\partial w}{\partial \lambda_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (f)$$

Eine Möglichkeit für eine relativ allgemeine Verzerrungsenergiefunktion lautet (Hill (1978), Ogden (1982), Storakers (1986))

$$w = \sum_{k=1}^N \frac{\mu_k}{\alpha_k} (\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3) \quad (g)$$

Einsetzen von (g) in (f) liefert zunächst die drei Spannungskordinaten, wenn die 1-Richtung die Belastungsrichtung ist, so daß in 2- und 3-Richtung Spannungsfreiheit vorliegt (einachsiger Zugversuch!)

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= p + \sum_{i=1}^N \mu_i \lambda_1^{\alpha_i} \\ \sigma_2 &= p + \sum_{i=1}^N \mu_i \lambda_2^{\alpha_i} = 0 \\ \sigma_3 &= p + \sum_{i=1}^N \mu_i \lambda_3^{\alpha_i} = 0 \end{aligned} \quad (h)$$

Wird noch angenommen, daß die Streckungen in 2- und 3-Richtung gleich sind, also  $\lambda_2 = \lambda_3$ , so gilt mit (e) zunächst

$$\lambda_1 \lambda_2^2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad \lambda_2^2 = \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \quad (i)$$

Damit sind auch die beiden Beziehungen (h)<sub>2</sub> und (h)<sub>3</sub> gleich, so daß sich daraus unter Beachtung von (i) zunächst der Zwangs-Spannungsanteil zu

$$p = -\sum_{i=1}^N \mu_i \lambda_2^{\alpha_i} = -\sum_{i=1}^N \mu_i \lambda_1^{-\frac{1}{2}\alpha_i} \quad (k)$$

und schließlich die folgende Stoffgleichung für die CAUCHYsche Spannungskordinate in Belastungsrichtung als Funktion der noch einzig verbleibenden Streckung  $\lambda$  wie folgt ergibt:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^N \mu_i \left( \lambda^{\alpha_i} - \lambda^{-\frac{1}{2}\alpha_i} \right) \quad \text{mit} \quad \lambda := \lambda_1 \equiv \frac{l(t)}{l_0} \quad (l)$$

Da beim Zugversuch die aktuelle (Zug-)Kraft  $K$  auf die Ausgangsfläche  $A_0$  bezogen wird, liegt gemäß (2.12) die Erste KIRCHHOFF-PIOLA-Spannung vor. Unter Beachtung der Zusammenhänge (3.124) und (3.125) (vgl. [1] Seite 132) ergibt sich zwischen der CAUCHY- und der KIRCHHOFF-PIOLA-Spannung die folgende Umrechnung:

$$P_1^I = \frac{1}{\lambda} \sigma_1 \quad (m)$$

Einsetzen von (l) in (m) liefert

$$P_1^I = \frac{K}{A_0} = \sum_{i=1}^N \mu_i \left[ \lambda^{\alpha_i-1} - \lambda^{-\left(\frac{1}{2}\alpha_i+1\right)} \right] \quad (o)$$

so Auflösen von (o) nach  $K$  schließlich das finale Stoffgesetz für inkompressible nicht-lineare hyperelastische Materialien wie folgt liefert:

$$\boxed{K = A_0 \sum_{i=1}^N \mu_i \left[ \lambda^{\alpha_i-1} - \lambda^{-\left(\frac{1}{2}\alpha_i+1\right)} \right]} \quad \lambda := \lambda_1 \equiv \frac{l(t)}{l_0} \quad (p)$$

Aus der allgemeinen Verzerrungsenergiefunktion (g) ergeben sich durch Wahl spezieller Werte für  $N$  und  $\alpha_i$  die folgenden speziellen Materialgesetze ([vgl. \[7\] Seite 160](#))

**Neo-HOOKE-Material:**  $N = 1, \mu_1 = 2c_1, \alpha_1 = 2$

$$\boxed{K = 2A_0c_1 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)} \quad \lambda := \lambda_1 \equiv \frac{l(t)}{l_0} \quad (q)$$

**MOONEY-RIVLIN-Material:**  $N = 2, \mu_1 = 2c_1, \mu_2 = -2c_2, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = -2$

$$\boxed{K = 2A_0 \left( c_1 + \frac{c_2}{\lambda} \right) \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)} \quad \lambda := \lambda_1 \equiv \frac{l(t)}{l_0} \quad (r)$$

**Materialidentifikation:** Anhand der experimentellen Befunde sind auf Basis des durch die Relaxationsabbruchpunkte entstehenden „Korridore der Gleichgewichtselastizität“ im Ausdruck (p) bei Vorgabe von  $N$  bzw. in den speziellen Ausdrücken (q) und (r) die Materialparameter  $\alpha_i$  mittels einer numerischen Optimierungsroutine zu identifizieren. Durch Ableiten der Spannungen im Nullpunkt können noch wie folgt äquivalente Elastizitätsmodule ermittelt werden:

**Neo-HOOKE-Material:** 
$$\boxed{E := \left. \frac{d\sigma}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = 3c_1} \quad (s)$$

**MOONEY-RIVLIN-Material:** 
$$\boxed{E := \left. \frac{d\sigma}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = 3(c_1 + c_2)} \quad (t)$$

## Anhang: Nicht-lineare Verzerrungsmaße

Für den *infinitesimaler Verzerrungstensor* (Deformator) galt (jetzt in allgemeinen Indizes):

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = \varepsilon_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle$$

Für die Gestaltung nicht-linearer Verzerrungsmaße ist die Definition des *Deformationsgradienten*  $F$  bzw. der *Streckung*  $\lambda$  erforderlich. Der Deformationsgradient kann quasi als der zentrale „Baustein“ der Verzerrungskinetik innerhalb der Kontinuumsmechanik angesehen werden. Für die Dehnung gilt generell bei Belastung in  $l$ -Richtung

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta l(t)}{l_0} \equiv \frac{l(t) - l_0}{l_0} \equiv \frac{l(t)}{l_0} - 1 \equiv \lambda_{11}(t) - 1 \equiv \frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial x}{\partial X} - 1 = F_{11} - 1$$

mit den jeweils ersten Elementen des Deformationsgradienten  $F_{11}$  bzw. der Streckung  $\lambda_{11}$

$$F_{11} = \lambda_{11} = \frac{l(t)}{l_0} = 1 + \varepsilon_{11}$$

Damit läßt sich der Deformator auch schreiben als

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = \begin{bmatrix} \lambda_{11} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} - 1 \end{bmatrix} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle$$

bzw. der Deformationsgradient



$$\begin{aligned}
[\mathbf{F}] &= \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix} \langle \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \rangle = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon_{33} \end{bmatrix} \langle \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \rangle = \\
&= \begin{bmatrix} 1+\varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\nu\varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu\varepsilon_{11} \end{bmatrix} \langle \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \rangle
\end{aligned}$$

Nach [1] gemäß (2.75) Seite 56 gilt für den rechten CAUCHYschen Verzerrungstensor

$$\begin{aligned}
[\mathbf{C}] &= [\mathbf{F}]^T \cdot [\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33}^2 \end{bmatrix} \langle \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \rangle = \begin{bmatrix} (1+\varepsilon_{11})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\varepsilon_{22})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\varepsilon_{33})^2 \end{bmatrix} \langle \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \rangle = \\
&= \begin{bmatrix} (1+\varepsilon_{11})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\nu\varepsilon_{11})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu\varepsilon_{11})^2 \end{bmatrix} \langle \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \rangle \\
&= \begin{bmatrix} 1+(2+\varepsilon_{11})\varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1-(2-\nu\varepsilon_{11})\nu\varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1-(2-\nu\varepsilon_{11})\nu\varepsilon_{11} \end{bmatrix} \langle \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \rangle
\end{aligned}$$

Nach [1] gemäß (2.84) Seite 58 bzw. gemäß (2.108) Seite 64 gilt für den rechten GREEN-LAGRANGEschen Verzerrungstensor

$$\begin{aligned}
[\mathbf{G}] &= \frac{1}{2}([\mathbf{C}] - [\mathbf{I}]) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_{11}^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22}^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33}^2 - 1 \end{bmatrix} \langle \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \rangle = \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1+\varepsilon_{11})^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\varepsilon_{22})^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\varepsilon_{33})^2 - 1 \end{bmatrix} \langle \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \rangle \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (2+\varepsilon_{11})\varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & (2+\varepsilon_{22})\varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & (2+\varepsilon_{33})\varepsilon_{33} \end{bmatrix} \langle \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \rangle \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (2+\varepsilon_{11})\varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -(2-\nu\varepsilon_{11})\nu\varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -(2-\nu\varepsilon_{11})\nu\varepsilon_{11} \end{bmatrix} \langle \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \rangle
\end{aligned}$$