

Vorkurs Mathematik



Sehr geehrte Studienfängerinnen und Studienanfänger,

willkommen an unserer Hochschule. Sie haben sich für einen Studiengang im Bereich Informatik, Ingenieurwesen oder Wirtschaftswissenschaften entschieden. In all diesen Fachdisziplinen ist **Mathematik ein wichtiges Werkzeug**, um Probleme methodisch zu lösen. Daher bietet die Hochschule Ihnen vor Beginn der Lehrveranstaltungen einen Vorkurs an.

Ziel des Vorkurses ist es, dass Sie Ihr Grundlagenwissen auffrischen, damit Sie sich während der Lehrveranstaltungen Ihres Studiengangs auf die neuen Lerninhalte konzentrieren können. Je nach zurückgelegtem Werdegang ist Ihr Startpunkt unterschiedlich. Manche kommen direkt von der Schule oder andere waren die letzten Jahre berufstätig. Viele kommen von der Fachoberschule, einige vom Gymnasium und manche von einer Schule in einem anderen Land.

Auf den folgenden Seiten finden Sie eine **Sammlung von Formeln und Aufgaben** zu den verschiedenen Themen aus der Schulzeit. Im Vorkurs wird eine Auswahl an Aufgaben besprochen. Am Ende dieses Dokuments finden die **Lösungswerte zu den Aufgaben**, damit Sie Ihre Rechnungen überprüfen können. Wir geben keine Lösungswege heraus, weil es mehrere Wege geben kann und Sie aufgefordert sind, Ihren Weg zu erarbeiten.

Während des Semesters können Sie gerne zur Mathewerkstatt kommen. Die Mathewerkstatt begleitet Sie beim Mathelernen im Studium. Es gibt Lernräume und Tutor*innen, die Ihnen bei Bedarf helfen. Sie können Feedback zu Ihren Rechnungen anfragen oder Ihre Fragen zum Vorlesungsstoff klären oder Lücken in den Grundlagen füllen. Ausführliche Informationen zu diesem Angebot finden Sie im campUAS-Kursraum und unter www.frankfurt-university.de/mathewerkstatt

Das Team des Mathe-Vorkurses

Grundlegende Fachbegriffe

	$a + b = c$	$a - b = c$	$a \cdot b = c$	$a : b = c$
Operation	Addition	Subtraktion	Multiplikation	Division
Operanden (a, b)	Summand	a Minuend b Subtrahend	Faktor	a Dividend b Divisor
Ergebnis (c)	Summe	Differenz	Produkt	Quotient

Ein **Term** ist eine sinnvolle mathematische Zeichenreihe ohne Relationszeichen. Eine **Gleichung** bzw. **Ungleichung** ist ein mathematischer Ausdruck, der aus zwei Termen besteht, die durch das Relationszeichen „=“ bzw. „<“ oder „>“ verbunden sind.

Welche Zeichenreihe ist ein Term, eine Gleichung bzw. eine Ungleichung?

Zeichenreihe	Term	Gleichung	Ungleichung
$4 - \frac{a}{8}$	☐	☐	☐
$-\frac{a}{8}$	☐	☐	☐
$2 \cdot (4 - m)$	☐	☐	☐
$a^2 + c^2 < a^2 + b^2$	☐	☐	☐
$a^2 + b^2 = c^2$	☐	☐	☐
$a^n + d^2 >$	☐	☐	☐

Tragen die grundlegenden mathematischen Fachbegriffe (s. oben) grammatikalisch passend in die Lücken ein. Achten auf Singular und Plural. Einige Begriffe können mehrfach vorkommen.

In der Mathematik ist ein _____ ein mathematischer Ausdruck, der aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen besteht, aber kein _____ enthält. Ein solcher Ausdruck kann zum Beispiel eine _____ oder ein _____ sein. In allgemeinen Rechenausdrücken werden die Objekte, auf die ein Operator wirkt, _____ genannt. Eine _____ besteht aus zwei _____, die durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden sind, wie zum Beispiel $2x + 3 = 7$.

Wenn zwei Terme addiert werden, spricht man von einer _____. Die einzelnen Terme, die addiert werden, heißen _____. In der Operation $3 + 5 = 8$ sind 3 und 5 die _____ und 8 ist die _____. Bei der Multiplikation wird ein ähnliches Schema verwendet. Die Terme, die miteinander multipliziert werden, nennt man _____ und das Ergebnis dieser Rechenoperation ist das _____. Zum Beispiel gilt: $4 \cdot 6 = 24$, wobei 4 und 6 die _____ sind und 24 das _____.

1 Terme mit Klammern umformen

Themenbezogene Fachbegriffe:

assoziativ, kommutativ, distributiv, ausklammern, ausmultiplizieren, faktorisieren

Name des Gesetzes	Formel	Kommentar
Kommutativgesetz • bzgl. der Addition • bzgl. Multiplikation	$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	Bei den genannten Operationen kann die Position der Operanden getauscht werden. Bei der Subtraktion und der Division ist es verboten.
Assoziativgesetz • bzgl. der Addition • bzgl. Multiplikation	$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$	
Distributivgesetz	$\xrightarrow{\text{„ausmultiplizieren“}}$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $\xleftarrow{\text{„ausklammern/faktorisieren“}}$	

Die Binomischen Formeln (BF) sind Spezialfälle des Distributivgesetzes:

1. BF: $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
2. BF: $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
3. BF: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Die BF können in beide Richtungen gelesen und angewendet werden.

1.1 Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen.

a) $5 - 3(a - 2)$

b) $5 - (a - 2) - 3$

c) $3ab - 2(7ac - 5ba)$

d) $y - 3(x - y)$

e) $x - [a - (x - y)] + a$

f) $-2zx + (6ya + 2xz)$

g) $(x + y)(x - y)$

h) $(b - a)(a - b)$

i) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

j) $a(4a - b)(3b - a)$

k) $23u - [14v - (8v + 6u - 3v - (43v - 16u) - 16u)]$

1.2 Faktorisieren Sie.

a) $ax + ay$

b) $x(a + b) - y(a + b)$

c) $(x - y)(3a + b) - (2a - b)(x - y)$

d) $a(u - v) + b(v - u)$

e) $12cd + 4ac - 16acd$

f) $-18xyz - 36wz - 45vz$

g) $2ax - 2ay + bx - by - cx + cy$

h) $axnd - axnc + abnd - abnc$

1.3 Ergänzen Sie in den leeren Stellen (?) einen passenden Term unter Verwendung der binomischen Formeln.

a) $a^2 + 12a + ? = (a + 6)^2$

b) $36s^2 - ? + 64 = (? - ?)^2$

c) $x^2 + 6xy + ? = (x + ?)^2$

d) $? + 10k + ? = (? + k)^2$

e) $? - \frac{2}{3}ad + ? = \left(\frac{?}{?}d - \frac{?}{?}\right)^2$

f) $(ac)^2 + 2ac + ? = (? + ?)^2$

1.4 Analysieren Sie die Terme in Aufgabe 2.2 hinsichtlich Binomischer Formeln.

2 Bruchrechnung

Themenbezogene Fachbegriffe: Zähler, Nenner, erweitern, kürzen, Hauptnenner, Kehrwert

Definition „Rationale Zahl“ bzw. Bruch

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0 \right\}$$

Die Menge der rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$; Bruchzahlen) ist die Menge aller Zahlen, die man durch Division zweier beliebiger ganzer Zahlen ($\mathbb{Z}$) erhält. Die Zahl oberhalb des Bruchstrichs heißt Zähler. Die Zahl unterhalb des Bruchstrichs heißt Nenner. Dieser darf nicht Null sein, weil die Division durch Null nicht definiert ist.

Ein Bruch kann unterschiedlich interpretiert werden:

- 1.) Ein Teil von einem Ganzen (z. B. $\frac{1}{2}$ bedeutet die Hälfte einer Pizza)
- 2.) Ein Anteil von mehreren Ganzen (z. B. $\frac{1}{2}$ bedeutet eine von zwei Personen)
- 3.) Eine Division (z. B. $\frac{1}{2} = 1:2$)

Kürzen und Erweitern sind Termumformungen von Brüchen. Sie verändern das Aussehen eines Bruchs. Der **Wert des Bruchterms bleibt gleich**. Kürzen und Erweitern braucht man beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen.

erweitern

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{ac}{bc}$$

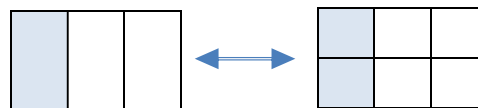
kürzen

Erweitern bedeutet, den ganzen Zähler und den ganzen Nenner mit demselben Term zu multiplizieren.

Achtung bei Summen und Differenzen im Zähler und/oder Nenner, d. h. gemäß Distributivgesetz ausmultiplizieren.

Kürzen heißt, den ganzen Zähler und den ganzen Nenner durch denselben Term zu teilen.

Achtung bei Summen und Differenzen im Zähler und/oder Nenner. Zur Sicherheit zuerst den gemeinsamen Faktor ausklammert.



$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{6}$$

Rechnen mit Brüchen und Bruchtermen

Operation	Formel	Kommentar
Addition	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$	Zwei Bruchterme dürfen addiert bzw. subtrahiert werden, wenn sie den gleichen Nenner haben, d. h. ggf. müssen einer der beiden oder beide Terme erweitert oder gekürzt werden.
Subtraktion	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$	
Multiplikation	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	Falls ein Term a, b, c oder d eine Summe oder Subtraktion enthält, ist das Distributivgesetz zu beachten.
Division	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	Bei der Division durch einen Bruch multipliziert man den Dividenten mit dem Kehrwert des Divisors .

- 2.1 Vergleichen Sie folgende Brüche, welcher die größere Zahl darstellt. Probieren Sie es zuerst alleine und ohne Taschenrechner. (Im Zweifel raten Sie. Möglicherweise haben Sie ein besseres Bauchgefühl, als Sie denken.) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit jemand anderen in der Gruppe und erklären Sie sich gegenseitig Ihre Vorgehensweise.

a) $\frac{16}{17} \square \frac{18}{17}$

b) $\frac{3}{4} \square \frac{3}{8}$

c) $\frac{3}{2} \square \frac{5}{4}$

d) $\frac{4}{10} \square \frac{9}{15}$

e) $-\frac{7}{21} \square -\frac{16}{24}$

f) $\frac{52}{36} \square \frac{26}{52}$

- 2.2 Kürzen Sie die folgenden Brüche, falls dies möglich ist. Identifizieren Sie dazu gleiche Faktoren in Zähler und Nenner.

a) $\frac{a^2b}{2ab}$

b) $\frac{a^2b}{a^2+a}$

c) $\frac{a^2b}{a^2+b}$

d) $\frac{a^2b}{a^2b+b}$

e) $\frac{a+b}{a-b}$

f) $\frac{a+b}{b+a}$

g) $\frac{a-b}{b-a}$

h) $\frac{a+b}{b^2+a^2}$

i) $\frac{a+b}{b^2-a^2}$

j) $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$

k) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$

m) $\frac{uv}{a} \cdot \frac{a^2u}{v}$

n) $\frac{u^2-v^2}{2mn^3} \cdot \frac{abm^2n}{2(u+v)}$

- 2.3 Schreiben Sie mit nur einem Bruchstrich.

a) $\frac{ab}{cd} \cdot \frac{xy}{uv}$

b) $\frac{ab}{cd} \cdot \frac{x+y}{u+v}$

c) $x : \frac{x^2y}{z}$

d) $(a+c) : \frac{c}{a^2-b^2}$

- 2.4 Addieren bzw. subtrahieren Sie folgende Brüche.

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}$

b) $\frac{5}{18} - \frac{3-a}{24} + \frac{a}{30}$

c) $\frac{ab}{cd} + \frac{xy}{uv}$

d) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$

e) $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{x+a}$

f) $\frac{2}{x} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x+1}$

g) $\frac{3}{u} + \frac{1}{u^2+2u+1} - \frac{2}{u^2-1}$

Tipp: Analysieren Sie zuerst die Nenner hinsichtlich der Faktoren, um geschickt zu erweitern.

2.5 Zu Werten $a, b, c, d > 0$ werden die folgenden vier Ausdrücke betrachtet:

$$x_1 = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

$$x_2 = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$$

$$x_3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$$

$$x_4 = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$$

Tragen Sie in die folgende Tabelle ein, ob sich der Wert der Ausdrücke vergrößert oder verkleinert, wenn man die einzelnen Variablen vergrößert bzw. verkleinert.

vergrößern \	x_1	x_2	x_3	x_4
a	größer*			
b				
c				
d				
verkleinern				
a				
b				
c				
d				

*Beispiel: Wenn man a vergrößert, so wird der Summand größer und damit wird die Summe x_1 größer.

Vergleichen Sie Ihre Eintragungen mit jemand anderen in der Gruppe. Falls Sie unterschiedlicher Meinung sind, erklären Sie dem / der anderen, an welcher Stelle er/sie sich irrt.

3 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Themenbezogene Fachbegriffe: Potenz, Basis, Exponent, Radikand, Logarithmus, Numerus

Definition „Potenz“

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-viele}} \text{ mit } a \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

Die Potenz a^n ist eine n-fache Multiplikation eines Faktors a mit sich selbst. In anderen Worten stellt eine Potenz eine Kurzschreibweise für ein Produkt mit n-vielen gleichen Faktoren dar. Man nennt a die Basis und n den Exponenten (Hochzahl) von a^n .

Weiterhin ist definiert: $a^0 = 1$ für $a \neq 0$

Potenzgesetze (= Rechenregeln für Potenzen)

Bedingungen	Potenzgesetz ($x, y \in \mathbb{R}$ und $u, v \in \mathbb{N}$)
Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis	$x^u \cdot x^v = x^{u+v}$
Division von Potenzen mit gleicher Basis	$x^u : x^v = x^{u-v}$
Multiplikation von Potenzen mit gleichen Exponenten	$x^u \cdot y^u = (xy)^u$
Division von Potenzen mit gleichen Exponenten	$\frac{x^u}{y^u} = \left(\frac{x}{y}\right)^u$ für $y \neq 0$
Potenzierte Potenzen	$(x^u)^v = x^{u \cdot v}$

Die Potenzgesetze können in beide Richtungen genutzt werden. Von links nach rechts gelesen beschreiben sie, wie mehrere Potenzterme unter bestimmten Bedingungen zusammengefasst werden dürfen. Von rechts nach links betrachtet zeigen sie, wie ein Potenzterm in mehrere Potenzen „zerlegt“ werden kann.

Vorsicht bei der **Addition und der Subtraktion von Potenztermen**. Dies ist nur unter der Bedingung möglich, dass Basen und Exponenten gleich sind. Allgemein:

$$ax^n \pm bx^n = (a \pm b)x^n \quad (a, b \in \mathbb{R}) \quad (\text{vgl. Distributivgesetz})$$

Zwei Potenzgesetze beschreiben, unter welcher Bedingung und wie die Schreibweise geändert werden darf.

Vorzeichenwechsel im Exponenten, wenn Potenz die Position zwischen Zähler und Nenner wechselt.	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
Wechsel zwischen der Potenz- und Wurzelschreibweise	$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

Definition „Wurzel“

Die n-te Wurzel aus einer nichtnegativen Zahl a ist diejenige nichtnegative Zahl x, für die gilt $x^n = a$. Man schreibt $x = \sqrt[n]{a}$. Die Potenzgesetze gelten ebenso für Wurzelterme.

3.1 Ersetzen Sie x jeweils durch eine Potenz, sodass die Gleichung erfüllt ist.

a) $a^3 \cdot x = a^7$ b) $x \cdot b^5 = b^3$ c) $c^{-4} \cdot x = c^{-2}$ d) $\frac{d^{-3}}{x} = d^4$ e) $\frac{x}{e^{-6}} = e^{10}$

3.2 Schreiben Sie den Term mit positiven Exponenten.

a) a^{-3} b) $a^2 b^{-1}$ c) $\frac{3}{4} x^{-5} y^{-2}$ d) $\frac{u^{-3}}{z^{-5}}$ e) $(x+y-9)^{-2}$

3.3 Vereinfachen Sie folgende Terme soweit wie möglich

a) $5x^{3n-2} \cdot \frac{2x^{m-4n+7}}{x^{m-2n}}$ b) $\left(\frac{x^2}{y}\right)^3 \cdot \left(\frac{y^2}{x}\right)^3$ c) $\frac{5m^2n+7n}{3m-2n} \cdot \frac{4n^2-9m^2}{15mn^2+10n^3}$

3.4 Fassen Sie folgende Terme soweit wie möglich zusammen.

a) $a^3 + a^2 + b^4 - b^2 + 4a^3 - 7a^2 + \frac{1}{2} b^4$
 b) $3u^2v^3 - 5u^3v^2 + 8v^3u^2 - 2u^3v^2 + 9uv^3$
 c) $\frac{1}{2} b^{-4} + \frac{1}{6} b^{-3} + \frac{1}{2} b^4 + \frac{1}{2} b^{-4} - \frac{1}{6} c^4$

3.5 Addieren Sie.

a) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^5}$ b) $\frac{3}{ac^2} + \frac{b}{(ac)^5}$ c) $\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2+1}{a^{m-2}}$

3.6 Schreiben Sie folgende Terme jeweils als Potenz mit einem Exponenten ($a > 0, b > 0$)

a) $a^4 b^4$ b) $\frac{a^{29}}{b^{29}}$ c) $\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}$ d) $(a+c)^6 \cdot (b+d)^6$ e) $a\sqrt{a}$
 f) $b^2 \cdot \sqrt[3]{b}$ g) $\sqrt{a^3}$ h) $\sqrt[3]{a^5}$ i) $(\sqrt[3]{a})^5$ j) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a}$

3.7 Schreiben Sie folgende Terme mit einem Wurzelzeichen ($x > 0, a > 0, b > 0$)

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ b) $b\sqrt{b}$ c) $b^2 \cdot \sqrt[3]{b^2}$ d) $x^2 \cdot \sqrt[4]{x}$ e) $\sqrt[k]{a^3} \cdot \sqrt[k]{b^7}$
 f) $\sqrt{\sqrt{x}}$ g) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$

3.8 Quadrieren Sie folgende Terme, für die gilt $x > 0, a > 0$ und $b > 0$

a) $\sqrt{x}$ b) $\sqrt[4]{x}$ c) $x + \sqrt{x}$ d) $x^2 - \sqrt[3]{x}$ e) $\sqrt{a+b}$
 f) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

3.9 Ziehen Sie (sofern möglich) die Wurzel ($x > 0, y > 0, a > 0, b > 0$)

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{64}$ c) $\sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[4]{16}$ e) $\sqrt[3]{125}$
 f) $\sqrt{4a^2b^3}$ g) $\sqrt{a^2 + b^2}$ h) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$

Definition Logarithmus

$$b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b(a) \quad \text{mit } b > 0 \text{ und } b \neq 1 \text{ und } a > 0$$

Wenn $b^x = a$, dann heißt x der **Logarithmus von a zur Basis b** . Der Logarithmus ist also eine **Hochzahl**. In anderen Worten, steht der Term $\log_b(a)$ für die Frage, wie oft muss man b mit sich selbst multiplizieren, um a zu erhalten, bzw. **mit welcher Zahl muss man b potenzieren muss, um a zu erhalten**. Das Ergebnis nennt man Logarithmus. Man nennt b die Basis und a heißt in diesem Zusammenhang Numerus (Argument des Logarithmus).

Hinweise:

- $\log$ ist ein Operator (d. h. keine Variable)
- zwischen $\log$ und dem Numerus ist ein echtes Leerzeichen (d. h. es ist kein Malzeichen versteckt)

Häufig verwendete Basen

Die Basis des Logarithmus kann grundsätzlich (fast) beliebig gewählt werden. Für häufig verwendete Basen gibt es eine besondere Schreibweise.

Bezeichnung	Basis	Kurzschreibweise
Binärer Logarithmus	2	$\lg(a) = \log_2(a)$
Natürlicher Logarithmus	$e \approx 2,71828\dots$	$\ln(a) = \log_e(a)$
Dekadischer Logarithmus	10	$\log(a) = \log_{10}(a)$

Logarithmengesetze

Bedingung(en)	Logarithmengesetz
Multiplikation im Numerus bzw. Summe mehrerer Logarithmenterme mit der gleichen Basis	$\log_b(c \cdot d) = \log_b(c) + \log_b(d)$
Division im Numerus bzw. Subtraktion mehrerer Logarithmenterme mit der gleichen Basis	$\log_b\left(\frac{c}{d}\right) = \log_b(c) - \log_b(d)$
Potenz im Numerus	$\log_b(c^d) = d \cdot \log_b(c)$

Die Logarithmengesetze können in beide Richtungen gelesen und angewendet werden. Bei einer Addition oder Subtraktion im Numerus ist keine Umformung erlaubt.

3.10 Schreiben Sie x als Logarithmus und berechnen Sie den Wert ohne Taschenrechner.

a) $2^x = 8$

b) $2^x = 4$

c) $2^x = 2$

d) $2^x = 1$

e) $2^x = \frac{1}{2}$

f) $2^x = \frac{1}{4}$

g) $2^x = \frac{1}{8}$

3.11 Bestimmen Sie mithilfe der Definition des Logarithmus.

a) $\log_3 81$

b) $\log_4 64$

c) $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right)$

d) $\log_5 \sqrt{5}$

e) $\log_5 \left(\frac{1}{5}\right)$

f) $\log_{10}(0,01)$

g) $\ln(e^{17})$

h) $\ln \left(\frac{1}{e}\right)$

3.12 Zerlegen Sie folgende Logarithmenterme, soweit gemäß der Logarithmengesetze möglich, in mehrere Terme.

a) $\log_a \left(\frac{x^2 y^3}{u^4 v}\right)$

b) $\log_a (\sqrt[4]{a^3})$

c) $\ln \left(\frac{ex^2}{xa^{-3}}\right)$

d) $\ln(1 + x^2)$

3.13 Fassen Sie, soweit gemäß der Logarithmengesetze möglich, zu einem Logarithmenterm zusammen.

a) $\log_a(u) - 2\log_a(v) + 4\log_a(z)$

b) $-\log_2(a) - \log_2(b) - \log_3(c)$

c) $\log_{10}(\sqrt{x}) + \log_2(x) - \log_{10} \sqrt{y}$

d) $2\ln 4 + \ln x + \log_e 3$

3.14 Bestimmen Sie x.

a) $\ln(2^x) = \ln(8)$

b) $\ln(4^x) = \ln(64)$

c) $\log_{10}(u^x) = \log_{10}(u)$

4 Funktionen und Gleichungen

Themenbezogene Fachbegriffe: Definitionsbereich, Wertebereich, Funktionsvorschrift, Variable, Parameter, Koeffizient, Nullpunkt, Achsenabschnitt, Äquivalenzumformung

Definition „Funktion“:

Bei einer Funktion wird jedem Element x aus ihrer Definitionsmenge **genau ein** Element y aus der Wertemenge **zugeordnet**. Das heißt, es gibt keinen x -Wert, dem mehrere y -Werte zugeordnet werden.

$f(x)=y$ bedeutet „eine Funktion mit dem Namen f ordnet einer Zahl x die Zahl y zu“, dabei wird

- x als Stelle oder Argument und
- y als Funktionswert der Funktion f an der Stelle x bezeichnet.

D_f Definitionsmenge einer Funktion f ist die Menge aller Zahlen, die ein x -Wert annehmen darf. Falls bei gegebenen Funktionen nichts angegeben ist, nimmt man üblicherweise die größtmögliche Definitionsmenge für die Funktion an

W_f Wertemenge einer Funktion f ist die Menge aller Funktionswerte

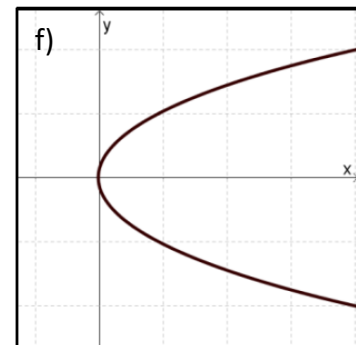
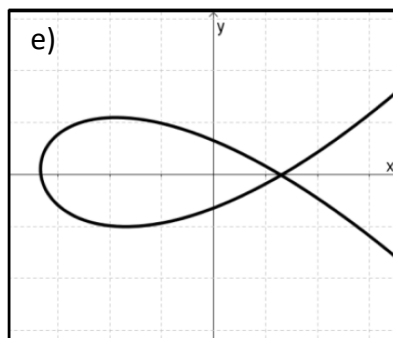
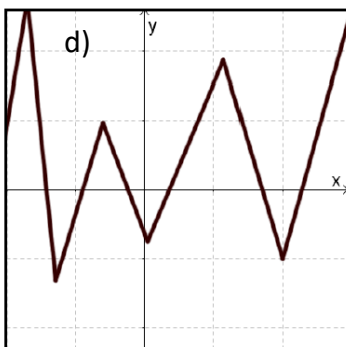
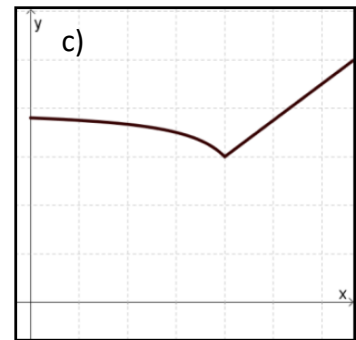
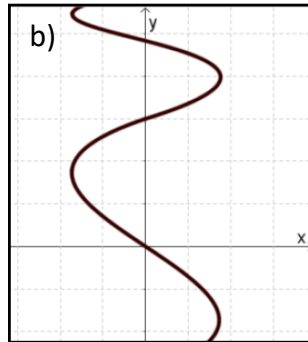
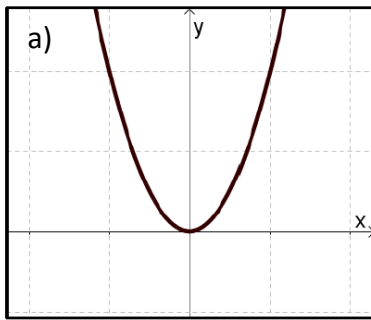
Darstellungsmöglichkeiten einer Funktion

Funktionen können auf unterschiedliche Art und Weise dargestellt werden:

- in Worten
- als Wertetabelle
- grafisch (Funktionsgraph)
- mittels Funktionsvorschrift (mathematische Symbolschreibweise)

Jede Darstellung hat ihre Vorteile und Nachteile, weshalb ein Wechsel der Darstellung hilfreich sein kann. Sie können

4.1 Welche der folgenden Abbildungen stellen Graphen einer Funktion dar? Begründen Sie Ihre Antwort.



4.2 Welche der folgenden Wertetabellen kann zu einer Funktion gehören? Begründen Sie Ihre Antwort.

Gefahren km	1	2	3	4	5
Preis in €	4	5	6	7	8

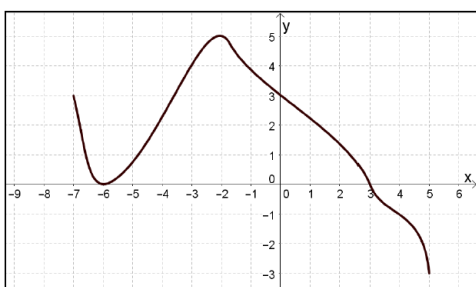
x	-1	0	1	2	3
y	3	1	3	5	7

a	-1	-1	1	1	3
b	3	4	3	0	1

4.3 Welcher der folgenden Zusammenhänge kann durch eine Funktion beschrieben werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) „Der Preis ist abhängig von der gekauften Menge einer Ware.“	b) „Jeder natürlichen Zahl wird ihr Vorgänger und ihr Nachfolger zugeordnet.“	c) „Jeder natürlichen Zahl wird die Anzahl ihrer Teiler zugeordnet.“
d) „Einer reellen Zahl x wird ihre Quadratzahl zugeordnet.“	e) „Der Zeit nach dem Öffnen eines Wasserhahns wird die ausgeflossene Wassermenge zugeordnet.“	f) „Bei allen Personen in Hessen wird der Körpergröße das Gewicht zugeordnet.“

4.4 Folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f .



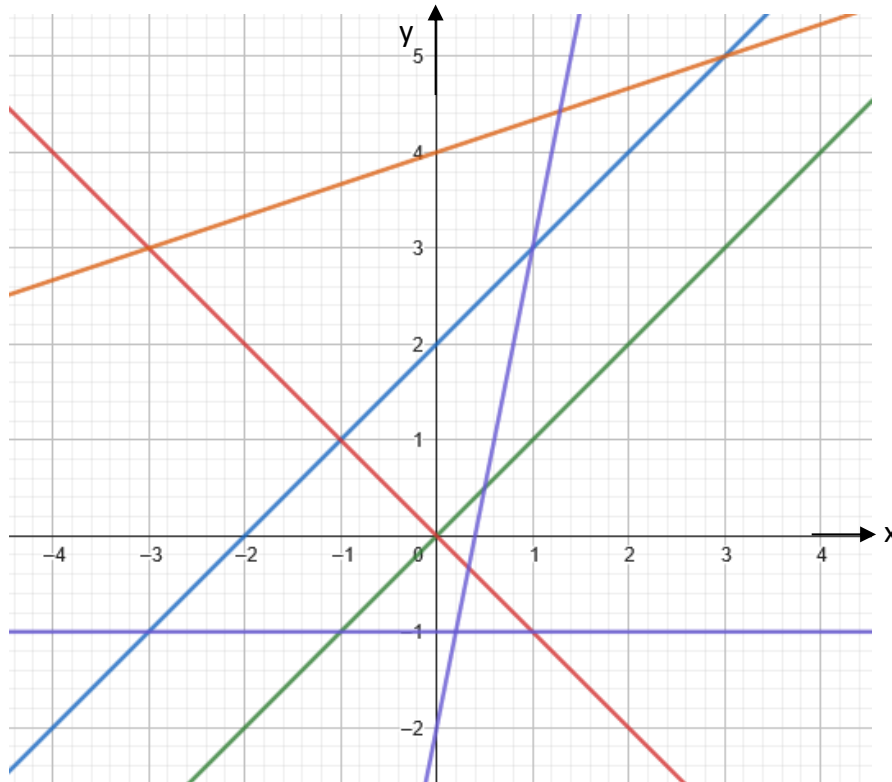
- Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion an.
- Geben Sie die Nullstellen der Funktion an.
- Geben Sie den Schnittpunkt mit der y -Achse an.
- Geben Sie ein Intervall an, in dem die Funktionswerte größer als 2 sind.
- Für welche Argumente sind die Funktionswerte negativ?
- Geben Sie ein Intervall an, in dem der Funktionsgraph steigt und eines in dem der Graph fällt.

5 Lineare Funktionen und lineare Gleichungen

Eine Funktion f der Form $f(x) = ax + b$ heißt **lineare Funktion**. Ihren Graphen bezeichnet man als **Gerade**.

5.1 Untersuchen Sie die Graphen, die in folgendem Diagramm gegeben sind.

a) Ordnen Sie folgenden Graphen die passende Funktionsvorschrift zu.



$f(x) = 5x - 2$
 $g_1(x) = x$
 $g_2(x) = x + 2$
 $h(x) = -x$
 $n(x) = -\frac{1}{2}x$
 $p(x) = -1$
 $q(x) = \frac{1}{3}x + 4$

b) Lesen Sie im Diagramm sowohl die Nullpunkte als auch den Schnittpunkt mit der y-Achse ab. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Schnittpunkte mit den Achsen ausrechnen.

c) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Funktion $g_2(x)$ mit $q(x)$ und prüfen Sie, ob g_1 und g_2 sich schneiden.

5.2 Bestimmen Sie alle Lösungen (die Lösungsmenge) der folgenden Gleichungen.

a) $14 + 2x = 11 - 7x$

b) $17(2 - 3x) - 8(1 - 7x) = 5(x + 12)$

c) $a - (a + b)x = (b - a)x - (c + bx)$

d) $\frac{5x - 6}{10} - \frac{9 - 10x}{14} = \frac{3x - 4}{5} - \frac{3 - 4x}{7}$

e) $-8(1 - 7x) - 5(x + 12) = 17(3x - 2) - 34$

6 Lineare Gleichungssysteme

Ein Lineares Gleichungssystem (LGS) setzt sich aus mehreren linearen Gleichungen zusammen, die gemeinsame Unbekannte enthalten. Gesucht sind Werte für alle Unbekannten, so dass jede Gleichung erfüllt ist.

Strategie zum Lösen LGS

Eliminieren Sie schrittweise die Variablen, indem Sie zwei Gleichungen miteinander kombinieren. Dazu können Sie drei Verfahren nutzen. Sie entscheiden in jedem Schritt, welche Variable an welcher Stelle Sie eliminieren.

Lösungsverfahren:

- 1) Additionsverfahren
- 2) Gleichsetzungsverfahren
- 3) Einsetzungsverfahren

6.1 Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem drei Mal mit jeweils einem anderen Lösungsverfahren.

$$\begin{cases} 4x + 4y = 4 \\ -10x - 8y = 4 \end{cases}$$

6.2 Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

a) I $x + y + 1 = 0$
II $x - 3y - 6 = 0$

b) I $x - 4y = 2$
II $-2x + 8y + 4 = 0$

c) I $x - 4y = 2$
II $-2x + 8y + 6 = 0$

d) I $6a + 12b = 30$
II $3a + 3b = 9$

e) I $-2s - t = -1$
II $3 = 5s + 4t$

f) I $-2ab + c = -2$
II $5a^2 - 7b = \frac{1}{3}$

g) I $3x + 2y + 5z = 8$
II $-3x + 2y + 5z = 2$
III $6x + y + z = 7$

h) I $\frac{4}{3}a + \frac{6}{9}b + \frac{2}{3}c = \frac{8}{3}$
II $3a - 4b + 3c = -2$
III $-4 = -a - 3b - 2c$

i) I $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
II $-2 = 3x_2 + x_3$
III $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$

6.3 Vergleichen Sie Ihre Lösungswege aus 6.3 mit jemand anderen in der Gruppe.

- i) In welcher Reihenfolge wurden die Unbekannten eliminiert?
- ii) Welche(s) Lösungsverfahren wurde(n) angewendet?
- iii) Ist ein Weg schneller / leichter / weniger fehleranfällig?

6.4 Bestimmen Sie die Parameter p bzw. q ($p, q \in \mathbb{R}$) so, dass das Gleichungssystem keine eindeutige Lösung hat, und bestimmen Sie für diesen Fall die Lösung.

a) $\begin{cases} -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 0 \\ 3x + py = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + qx_3 = 0 \end{cases}$

7 Quadratische Funktionen und Gleichungen

Eine Funktion f der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ heißt **quadratische Funktion** (mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$). Ihr Graph beschreibt eine **Parabel**.

Quadratische Gleichungen sind Gleichungen, in denen die Unbekannte in der zweiten Potenz vorkommt. Die allgemeine Form ist $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$). Solche Gleichungen kann man mit der **quadratischen Ergänzung** oder der **abc- oder Mitternachtsformel** lösen.

Liegt die Gleichung in der Normalform vor, also $x^2 + p x + q = 0$, kann man die **p-q-Formel** zum Lösen anwenden:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Liegt die Gleichung in der Form $x^2 + p x = 0$ vor, kann der **Satz vom Nullprodukt** angewendet werden, d. h. x wird ausgeklammert und die einzelnen Faktoren gleich Null gesetzt.

$$\begin{array}{ll} ax^2 + b x = 0 & | x \text{ ausklammern} \\ x \cdot (ax + b) = 0 & | \text{Fallunterscheidung} \\ \begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ x_1 = 0 & ax_2 + b = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a} \end{array} \end{array}$$

Die Lösung für x_1 kann abgelesen werden. Die Lösung für x_2 kann ermittelt werden, indem man die Gleichung nach x_2 umstellt.

Eine quadratische Gleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$ beschreibt in einem zweidimensionalen Koordinatensystem eine **Parabel**.

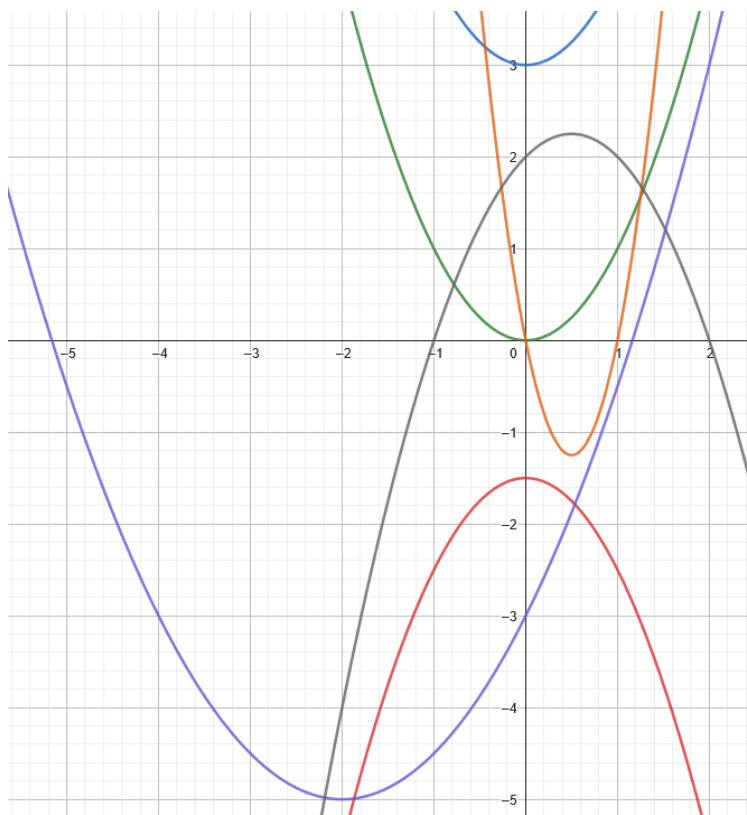
7.1 Analysieren Sie folgende Gleichungen:

- i) Welche sind quadratische Gleichungen?
- ii) Mit welchen Lösungsverfahren können Sie die jeweilige quadratische Gleichung lösen?

7.2 Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen.

- | | | |
|---|--------------------------|---|
| a) $3 - 4x^2 = 5 - 6x^2$ | b) $x^2 - 4x - 21 = 0$ | c) $16x^2 - 96x + 80 = 0$ |
| d) $(x + 1)(x - 2) = 0$ | e) $4z^2 + 12z = 0$ | f) $-\frac{1}{5} = -t^2 + \frac{4}{25}$ |
| g) $11a^2 - 3(a^2 + a) = 8a^2 + 9a$ | h) $x^2 + bx - 2b^2 = 0$ | i) $x^2 + x^4 - 1 = -20$ |
| j) $100 - \frac{6}{3}t^2 = -t^2 + \frac{72}{2}$ | k) $x^2 - 4x + 21 = 0$ | m) $100 - x^2 = 2^x + \frac{71}{3}$ |

- 7.3 Ordnen Sie folgenden Graphen die passende Funktionsvorschrift zu. Lesen Sie im Diagramm sowohl die Nullpunkte als auch den Schnittpunkt mit der y-Achse ab. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Schnittpunkte mit den Achsen ausrechnen.



$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3 \\ b(x) &= 5x^2 - 5x \\ c(x) &= x^2 + 3 \\ f(x) &= x^2 \\ g(x) &= -x^2 - \frac{3}{2} \\ h(x) &= -x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

- 7.4 Bestimmen Sie für die folgenden Parabeln die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und den Scheitelpunkt. Skizzieren Sie die Graphen.

a) $r(x) = x^2 - 6x + 8$

b) $s(x) = -2x^2 + 7x - 6$

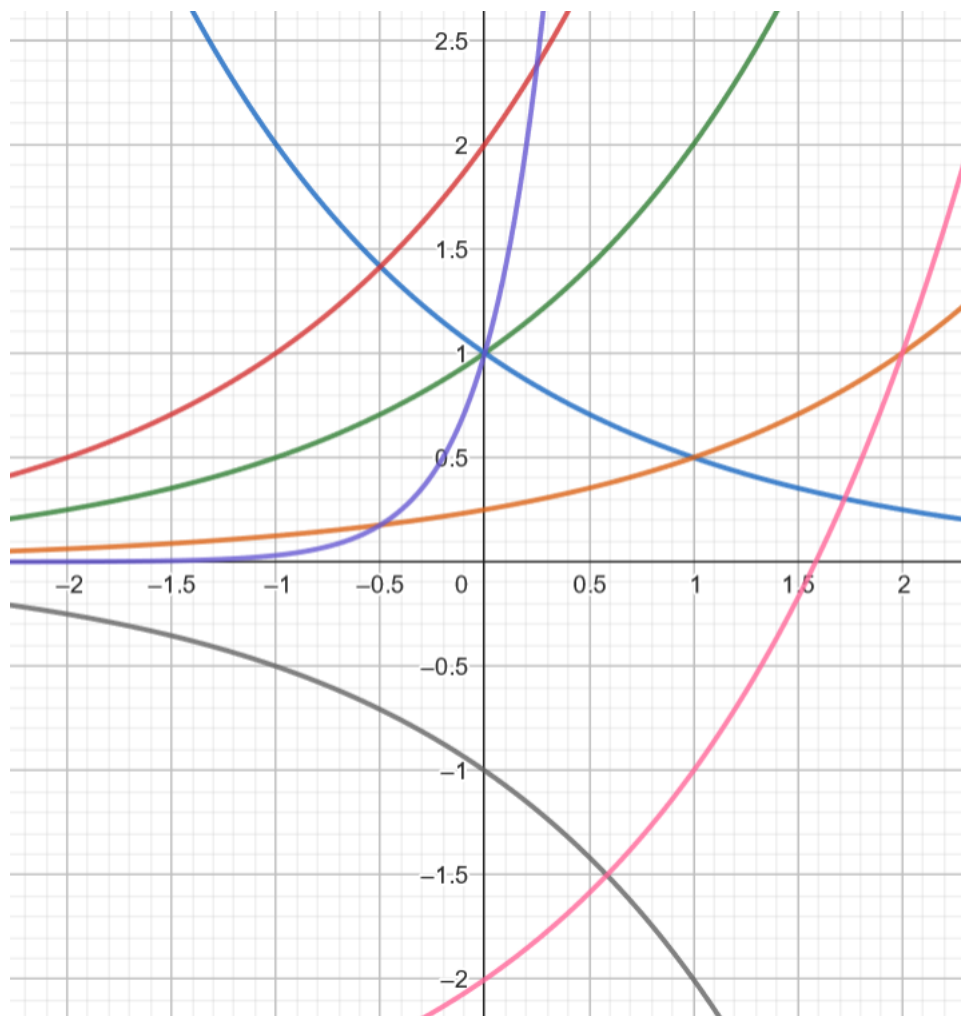
c) $t(x) = 3 - 4x^2$

- 7.5 Quadratische Gleichungen mit Parametern lösen.

- a) Bestimmen Sie den Parameter t so, dass die Gleichung $2x^2 + 4x = t$ genau eine reelle Lösung hat.
- b) Prüfen Sie, für welche Werte von a die Gleichung $3x^2 + ax - \frac{9}{2} = 0$
 $b_1)$ zwei Lösungen, $b_2)$ genau eine Lösung bzw. $b_3)$ keine Lösung hätte?

8 Exponentialfunktionen und Gleichungen

8.1 Ordnen Sie den Graphen die passende Funktionsvorschrift zu.



$$\begin{aligned} a(x) &= 2^{5x} \\ b(x) &= 2^{x-2} \\ f(x) &= 2^x \\ g(x) &= 2^{-x} \\ h(x) &= 2^{x+1} \\ r(x) &= -2^x \\ s(x) &= 2^x - 3 \end{aligned}$$

8.2 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen.

a) $5^x = 34$

b) $3^x = 32$

c) $4^x = 18$

d) $\frac{2}{3} \cdot 12^{x+3} = 22$

e) $2^{2x-4} = 64$

f) $2^x \cdot 8^{x-1} = 32$

g) $6^{-x} = 12$

h) $4^{3x+1} = 16^{-x}$

i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

9 Lösungen

Folgend finden Sie die Lösungswerte der Aufgaben, damit Sie Ihre eigenen Rechnungen überprüfen können. Wir geben keine Lösungswege, da es bei diesen Aufgaben mehrere Lösungswege gibt. Wichtig ist, dass Sie einen eigenen Weg finden und nicht denjenigen der „Musterlösung“. Die Angaben sind ohne Gewähr. Im Zweifel fragen Sie bitte Ihre Kommiliton*innen oder die Tutor*innen.

1.1. Rechnen mit Klammern

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------|------------------|
| a) $11 - 3a$ | b) $4 - a$ | c) $13ab - 14ac$ |
| d) $-3x + 4y$ | e) $2x - y$ | f) $6ay$ |
| g) $x^2 - y^2$ | h) $-a^2 - b^2 + 2ab$ | i) $x^3 - y^3$ |
| j) $-4a^3 + 13a^2b - 3ab^2$ | k) $29u - 52v$ | |

1.2. Faktorisieren Sie.

- | | | |
|--------------------------|-----------------------|-------------------------|
| a) $a(x + y)$ | b) $(a + b)(x - y)$ | c) $(x - y)(a + 2b)$ |
| d) $(u - v)(a - b)$ | e) $4c(3d + a - 4ad)$ | f) $-9z(2xy + 4w + 5v)$ |
| g) $(2a + b - c)(x - y)$ | h) $an(x + b)(d - c)$ | |

1.3 Binomische Formeln

- | | | |
|---------------------------------|---|------------------------------------|
| a) $a^2 + 12a + 36 = (a + 6)^2$ | b) $36s^2 - 96s + 64 = (6s - 8)^2$ | c) $x^2 + 6xy + 9y^2 = (x + 3y)^2$ |
| d) $25 + 10k + k^2 = (5 + k)^2$ | e) $\frac{1}{9}d^2 - \frac{2}{3}ad + a^2 = \left(\frac{1}{3}d - a\right)^2$ | f) $(ac)^2 + 2ac + 1 = (ac + 1)^2$ |

2.1 Brüche vergleichen

- | | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| a) $\frac{16}{17} < \frac{18}{17}$ | b) $\frac{3}{4} > \frac{3}{8}$ | c) $\frac{3}{2} > \frac{5}{4}$ |
| d) $\frac{4}{10} < \frac{9}{15}$ | e) $-\frac{7}{21} < -\frac{16}{24}$ | f) $\frac{52}{36} > \frac{26}{52}$ |

2.2 Kürzen Sie die folgenden Brüche, falls dies möglich ist.

- | | | | | |
|------------------|---------------------|----------------------------|------------------------|----------------------|
| a) $\frac{a}{2}$ | b) $\frac{ab}{a+1}$ | c) nicht möglich | d) $\frac{a^2}{a^2+1}$ | e) nicht möglich |
| f) 1 | g) -1 | h) nicht möglich | i) $\frac{1}{b-a}$ | j) $\frac{a+b}{a-b}$ |
| k) nicht möglich | m) u^2a | n) $\frac{(u-v)abm}{4n^2}$ | | |

2.3 Schreiben Sie mit nur einem Bruchstrich.

- | | | | |
|-------------------------|------------------------------|-------------------|-------------------------------|
| a) $\frac{abxy}{cd uv}$ | b) $\frac{ab(x+y)}{cd(u+v)}$ | c) $\frac{z}{xy}$ | d) $\frac{(a+c)(a^2-b^2)}{c}$ |
|-------------------------|------------------------------|-------------------|-------------------------------|

2.4 Addieren bzw. subtrahieren Sie folgende Brüche.

a) $\frac{353}{720}$

b) $\frac{55+27a}{360}$

c) $\frac{abuv+cdxy}{cduv}$

d) $-\frac{2}{x^2-2x}$

e) $\frac{2x}{a^2-x^2}$

f) $\frac{8x+5}{3x^2+3x}$

g) $\frac{3u^3+2u^2-6u-3}{u(u-1)(u+1)^2}$

3.1 Ersetzen Sie x jeweils durch eine Potenz, sodass die Gleichung erfüllt ist.

a) $a^3 \cdot a^4 = a^7$

b) $b^2 \cdot b^5 = b^3$

c) $c^{-4} \cdot c^2 = c^{-2}$

d) $\frac{d^{-3}}{d^{-7}} = d^4$

e) $\frac{e^4}{e^{-6}} = e^{10}$

3.2 Schreiben Sie den Term mit positiven Exponenten.

a) $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

b) $a^2 b^{-1} = \frac{a^2}{b}$

c) $\frac{3}{4} x^{-5} y^{-2} = \frac{3}{4x^5 y^2}$

d) $\frac{u^{-3}}{z^{-5}} = \frac{z^5}{u^3}$

e) $(x+y-9)^{-2} = \frac{1}{(x+y-9)^2}$

3.3 Vereinfachen Sie folgende Terme soweit wie möglich

a) $10x^{n+5}$

b) $x^3 y^3$

c) $-\frac{5m^2+7}{5n}$

3.4 Fassen Sie folgende Terme soweit wie möglich zusammen.

a) $5a^3 - 6a^2 + \frac{3}{2}b^4 - b^2$

b) $-7u^3 v^2 + 11u^2 v^3 + 9uv^3$

c) $\frac{1}{2}b^4 + b^{-4} + \frac{1}{6}b^{-3} - \frac{1}{6}b^4$

3.5 Addieren Sie.

a) $\frac{a^3+1}{a^5}$

b) $\frac{3a^4 c^3 + b}{(ac)^5}$

c) $\frac{a^3-1}{a^{m+1}}$

3.6 Schreiben Sie folgende Terme jeweils als Potenz mit einem Exponenten ($a > 0, b > 0$)

a) $(ab)^4$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{29}$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}$

d) $[(a+c)(b+d)]^6$

e) $a^{3/2}$

f) $b^{7/3}$

g) $a^{3/2}$

h) $a^{5/3}$

i) $a^{5/3}$

j) $a^{8/15}$

3.7 Schreiben Sie folgende Terme mit einem Wurzelzeichen ($x > 0, a > 0, b > 0$)

a) $\sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt{b^3}$

c) $\sqrt[3]{b^8}$

d) $\sqrt[4]{x^9}$

e) $\sqrt[k]{a^3 b^7}$

f) $\sqrt[4]{x}$

g) $\sqrt[8]{x}$

3.8 Quadrieren Sie folgende Terme, für die gilt $x > 0, a > 0$ und $b > 0$

a) x

b) $\sqrt{x}$

c) $x^2 + 2x\sqrt{x} + x$

d) $x^4 - 2x^{7/3} + x^{2/3}$

e) $a + b$

f) $a + 2\sqrt{ab} + b$

3.9 Ziehen Sie (sofern möglich) die Wurzel ($x > 0, y > 0, a > 0, b > 0$)

a) 6

b) 8

c) 4

d) 2

e) 5

f) $2ab\sqrt{b}$

g) nicht möglich

h) $a + b$

3.10 Schreiben Sie x als Logarithmus und berechnen Sie den Wert ohne Taschenrechner.

a) $x = 3$

b) $x = 2$

c) $x = 1$

d) $x = 0$

e) $x = -1$

f) $x = -2$

g) $x = -3$

3.11 Bestimmen Sie mithilfe der Definition des Logarithmus.

a) $\log_3 81 = 4$

b) $\log_4 64 = 3$

c) $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = -2$

d) $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$

e) $\log_5 \left(\frac{1}{5}\right) = -1$

f) $\log_{10}(0,01) = -2$

g) $\ln(e^{17}) = 17$

h) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$

3.12 Logarithmenterme zerlegen.

- a) $2\log_a(x) + 3\log_a(y) - 4\log_a(u) - \log_a(v)$
- b) $\frac{3}{4}\log_a(a) = \frac{3}{4}$
- c) $1 + \ln(x) + 3\ln(a)$
- d) keine Umformung erlaubt wegen der Summe im Numerus

3.13 Logarithmenterme zusammenfassen.

- a) $\log_a\left(\frac{uz^4}{v^2}\right)$
- b) $\log_2\left(\frac{1}{ab}\right) - \log_3(c)$
- c) $\log_{10}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right) + \log_2(x)$
- d) $\ln(48x)$

3.14 Bestimmen Sie x.

- a) $x = 3$
- b) $x = 3$
- c) $x = 1$

4.1 Die Schaubilder a), c) und d) zeigen eine Funktion.

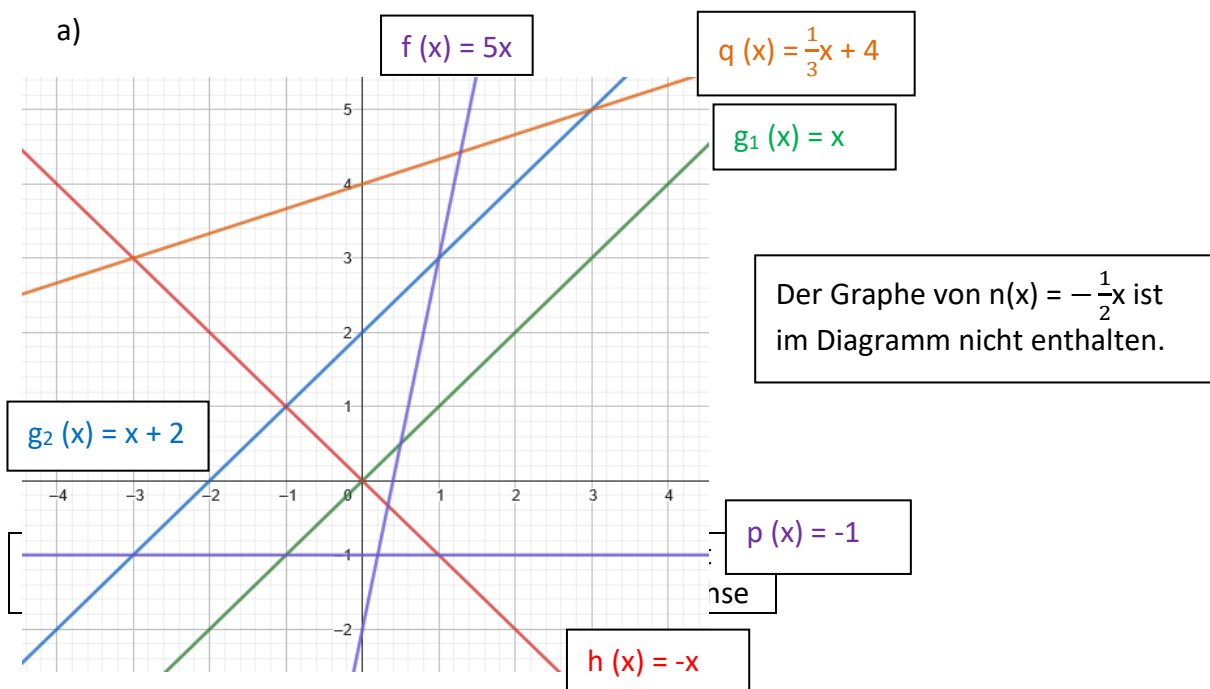
4.2 a) und b)

4.3 a), c), d) und e)

4.4

- a) $D_f = [-7; 5]$ und $W_f = [-3; 5]$
- b) Nullstellen liegen bei $x_1 = -6$ und $x_2 = 3$
- c) Schnittpunkt $S_y(0|3)$
- d) $f(x) > 2$ für beispielsweise $x \in [-4; 1]$
- e) $f(x) < 0$ für beispielsweise $3 < x < 5$
- f) positive Steigung beispielsweise im Intervall $[-5; -3]$ und negative Steigung beispielsweise von $[-1; 4]$.

5.1 Ordnen Sie den Graphen die passende Funktionsvorschrift zu.



$f(x) = 5x - 2$	$N_f(\frac{2}{5} 0)$	$N_f(0 -2)$
$g_1(x) = x$	$N_{g_1}(0 0)$	$N_{g_1}(0 0)$
$g_2(x) = x + 2$	$N_{g_2}(-2 0)$	$N_{g_2}(0 2)$
$h(x) = -x$	$N_h(0 0)$	$N_h(0 0)$
$p(x) = -1$	kein Nullpunkt	$N_p(0 -1)$
$q(x) = \frac{1}{3}x + 4$	$N_q(-12 0)$	$N_q(0 4)$

b)

c)

Schnittpunkt von $g_2(x)$ mit $q(x)$:
 $S(3 | 5)$

g_1 und g_2 haben aufgrund ihrer
 Parallelität keinen Schnittpunkt.

5.2 Bestimmen Sie alle Lösungen (die Lösungsmenge) der folgenden Gleichungen:

- a) $x = -\frac{1}{3}$ b) nicht lösbar c) $x = \frac{a+c}{b}$ d) $x = \frac{1}{3}$
 e) $x \in \mathbb{R}$, d. h. für x kann jede reelle Zahl eingesetzt werden.

6.1 $x = -6$ und $y = 7$

6.2

- a) $\mathbb{L} = \{(x = \frac{3}{4}, y = -\frac{7}{4})\}$ Interpretation: Zwei Geraden schneiden sich im Punkt $S(\frac{3}{4} | -\frac{7}{4})$
 b) Beide Gleichungen beschreiben dieselbe Gerade. Alle Punkte dieser Geraden sind in der Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\}$ enthalten.
 c) Es ergibt sich ein Widerspruch, d. h. $\mathbb{L} = \{ \}$. Die beiden Gleichungen sind parallel zueinander, sodass es keinen Schnittpunkt gibt.
 d) $\mathbb{L} = \{(a = 1, b = 2)\}$, d. h. die Gerade schneiden sich im Punkt $S(1 | 2)$.
 e) $\mathbb{L} = \{(s = t = \frac{1}{3})\}$, d. h. die Gerade schneiden sich im Punkt $S(\frac{1}{3} | \frac{1}{3})$.
 f) Das Gleichungssystem ist nicht linear.
 g) $x = z = 1$ und $y = 0$. Die drei Geraden schneiden sich im Raum in dem Punkt $S(1 | 0 | 1)$.
 h) Die drei Gerade schreiben sich im Punkt $P(\frac{7}{4} | \frac{5}{4} | -\frac{3}{4})$.
 i) $\mathbb{L} = \{(x_1 = \frac{1}{3} - \frac{5}{6}t \text{ und } x_2 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}t \text{ und } x_3 = t)\}$ mit $t \in \mathbb{R}$

6.4

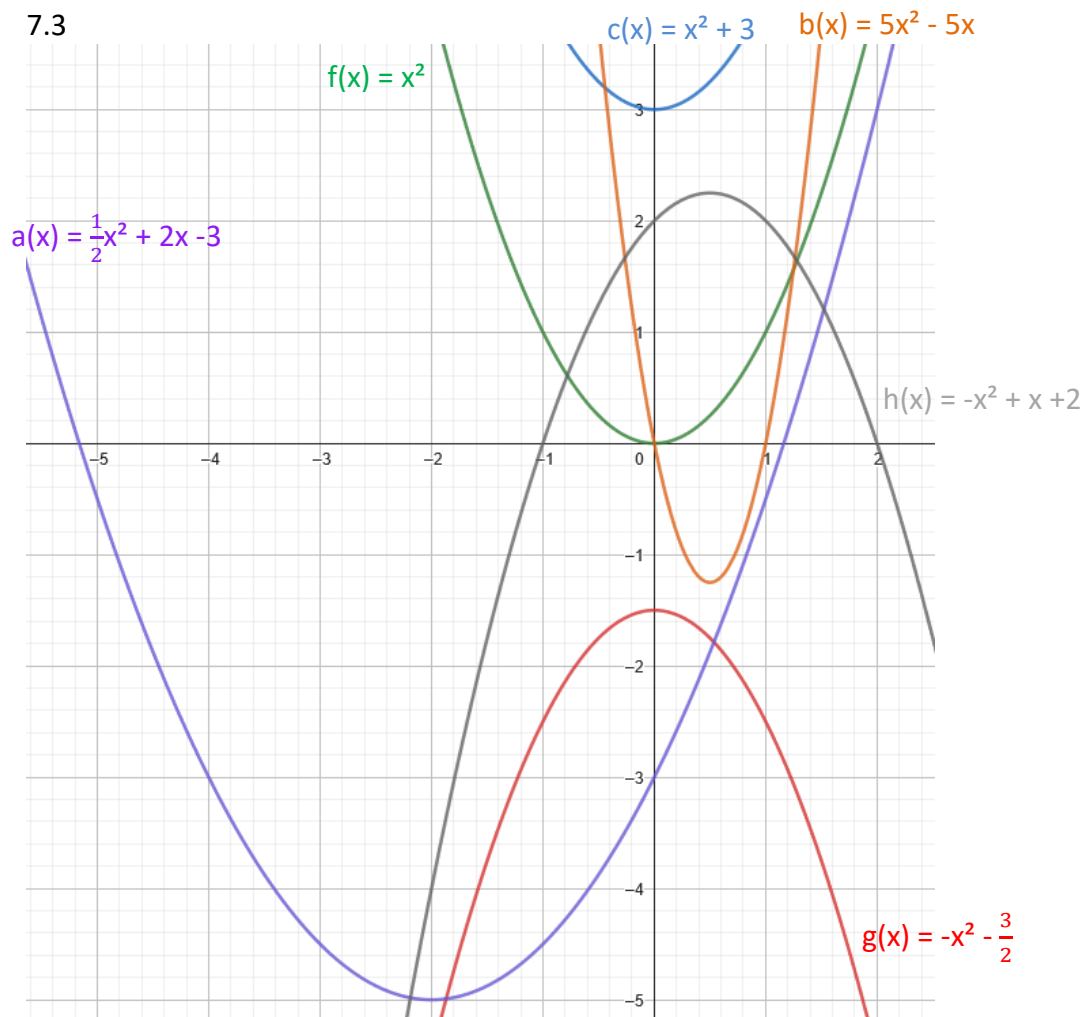
- a) Für $p = -6$ lautet die Lösung $x = 2a$ und $y = a$ mit $a \in \mathbb{R}$.
 b) Für $q = 0$ lautet die Lösung $x_1 = x_3 = t$ und $x_2 = -2t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

7.1 Die Gleichungen i) und m) sind keine quadratischen Gleichungen.

7.2

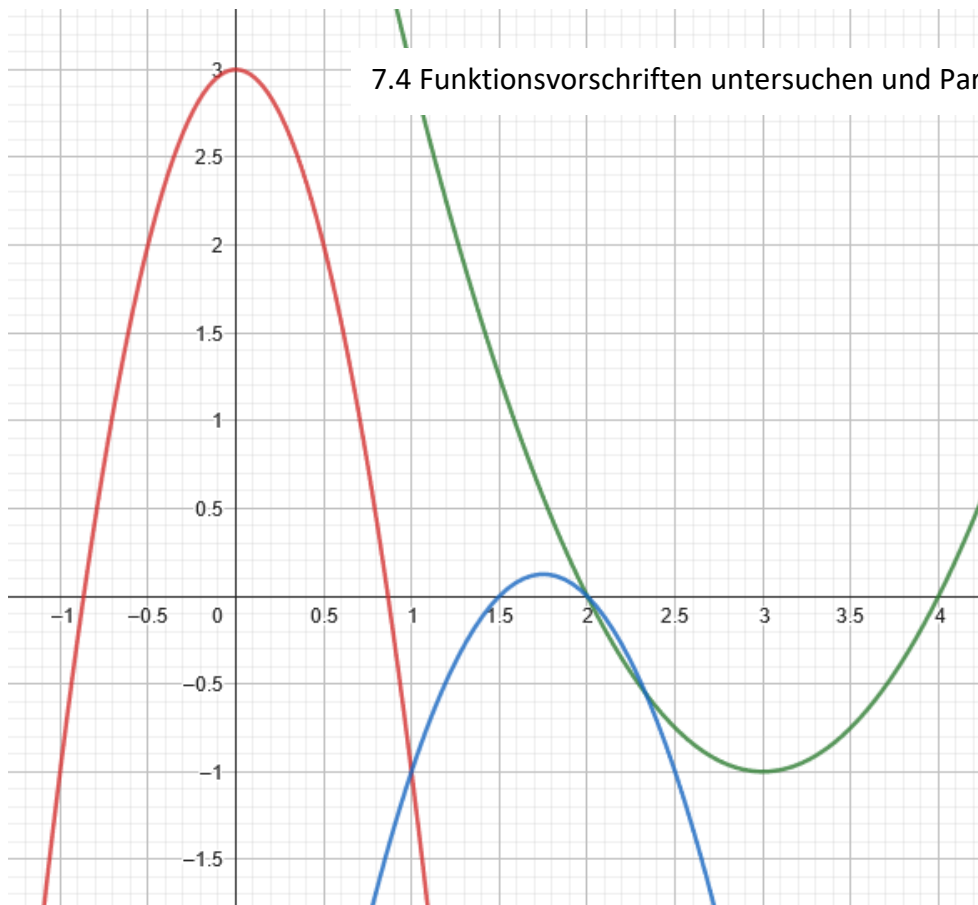
- a) $x_1 = 1, x_2 = -1$ b) $x_1 = 7, x_2 = -3$ c) $x_1 = 1, x_2 = 5$
 d) $x_1 = -1, x_2 = 2$ e) $z_1 = 0, z_2 = -3$ f) $t_{1/2} = \pm \frac{3}{5}$
 g) $a = 0$ h) $x_1 = b, x_2 = -2b$
 j) $t = \pm 8$ k) keine reelle Lösung

7.3



7.4 Nullpunkte und Scheitelpunkte ermitteln

Funktionsvorschrift	Nullpunkte	Scheitelpunkt
a) $r(x) = x^2 - 6x + 8$	$N_1 (2 0)$ und $N_2 (4 0)$	$S_a (3 -1)$
b) $s(x) = -2x^2 + 7x - 6$	$N_1 (\frac{3}{2} 0)$ und $N_2 (2 0)$	$S_b (\frac{7}{4} \frac{1}{8})$
c) $t(x) = 3 - 4x^2$	$N_1 (-\sqrt{\frac{3}{4}} 0)$ und $N_2 (\sqrt{\frac{3}{4}} 0)$	$S_c (0 3)$



- a) Schnittpunkte mit der x-Achse: $S_1(2|0)$ und $S_2(4|0)$
 Schnittpunkt mit der y-Achse: $P(0|8)$
 Scheitelpunkt TP $(3|-1)$ (tiefster Punkt)

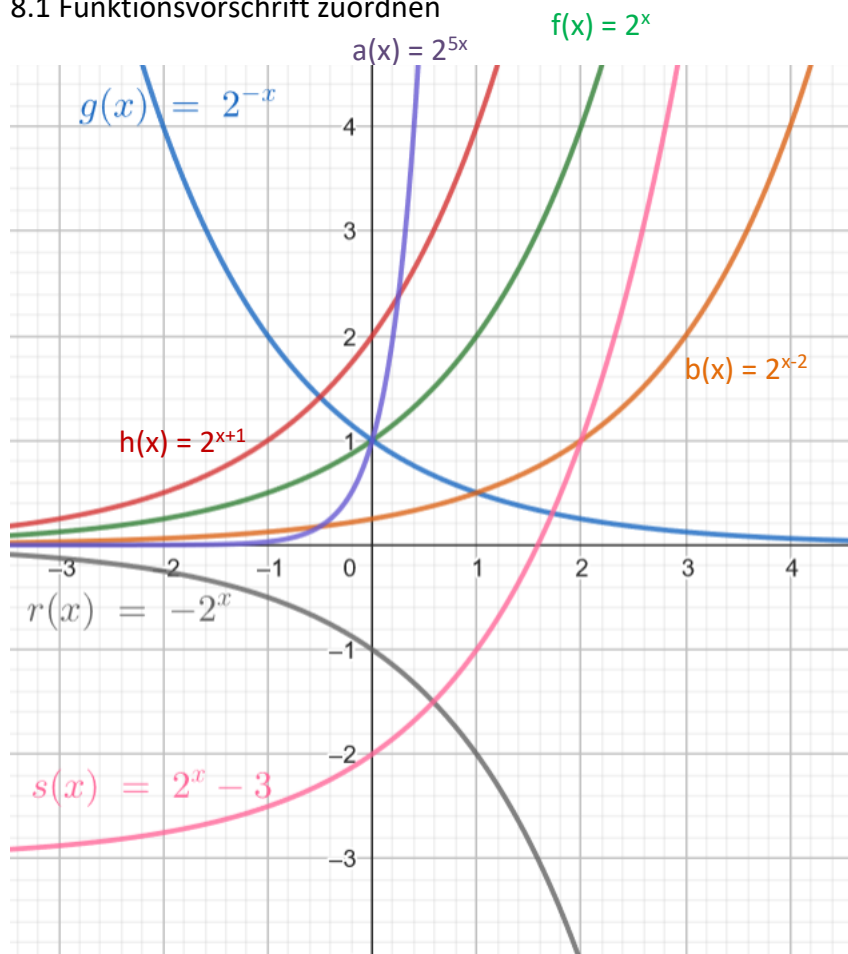
- b) Schnittpunkte mit der x-Achse: $S_1(2|0)$ und $S_2(\frac{3}{2}|0)$
 Schnittpunkt mit der y-Achse: $P(0|-6)$
 Scheitelpunkt HP $(\frac{7}{4}|\frac{1}{8})$ (höchster Punkt)

- c) Schnittpunkte mit der x-Achse: $S_1(\frac{-3}{4}|0)$ und $S_2(\frac{3}{4}|0)$
 Schnittpunkt mit der y-Achse: $P(0|3)$
 Scheitelpunkt HP $(3|0)$ (höchster Punkt)

7.5

- a) Die Gleichung hat eine Lösung für $t = -2$.
- b) b_1) Die Gleichung hat zwei Lösungen für $a \in \mathbb{R}$. Daher gibt es keine Werte für den Parameter a , sodass genau eine Lösung bzw. keine Lösung gibt. (b_2 und b_3).

8.1 Funktionsvorschrift zuordnen



8.2

a) $x = \log_5 34$

b) $x = \log_3 32$

c) $x = \log_4 18$

d) $x = \frac{\log 33}{\log 12} - 3$

e) $x = 5$

f) $x = 2$

g) $x = -\log_6 12$

h) $x = -\frac{1}{5}$

i) $x = 2$

Quellenverzeichnis

Einige der Aufgaben, die in dieser Sammlung enthalten sind, haben wir der Fachliteratur entnommen. Falls Sie also weitere Übungsaufgaben sich holen möchten, finden Sie folgende Quellen in unserer Bibliothek.

Purkert, Walter (2014): Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. 8. Auflage. Springer Fachmedien. Wiesbaden.

Hoefer, Georg (2010): Vorkurs Mathematik. Theorie und Aufgaben mit vollständig durchgerechneten Lösungen. Springer Verlag. Berlin.