

Vorkurs Mathematik



Sehr geehrte Teilnehmer*innen des Vorkurses,

in Ihrem Studiengang wird **Mathematik ein wichtiges Werkzeug** sein, um Probleme methodisch zu lösen. **Ziel des Vorkurses ist es, dass Sie Ihr Grundlagenwissen auffrischen**, damit Sie sich während Ihrer zukünftigen Lehrveranstaltungen auf die neuen Lerninhalte konzentrieren können.

Je nach zurückgelegtem Werdegang ist Ihr Startpunkt unterschiedlich. Manche kommen direkt von der Schule oder andere waren die letzten Jahre berufstätig. Viele kommen von der Fachoberschule, einige vom Gymnasium und manche von einer Schule in einem anderen Land.

Auf den folgenden Seiten finden Sie eine **Sammlung von Formeln und Aufgaben** zu den verschiedenen Themen aus der Schulzeit. Sie brauchen **keinen Taschenrechner. Ihre Ideen, Fragen und auch Fehler sind im Vorkurs willkommen**. Diese gehören zum Lernen dazu.

Im Vorkurs wird eine Auswahl an Aufgaben besprochen. Am Ende dieses Dokuments finden Sie die Lösungswerte zu den Aufgaben, damit Sie Ihre Rechnungen überprüfen können. Wir geben keine Lösungswege heraus, weil es mehrere Wege geben kann und Sie aufgefordert sind, Ihren Weg zu erarbeiten.

Nach dem Vorkurs ist das Team der **Mathewerkstatt** weiterhin für Sie da. Kommen Sie zum Lernen vorbei, klären Sie Ihre Fragen zum Vorlesungsstoff oder holen Sie sich Feedback. Alle Informationen finden Sie im campUAS-Kursraum und unter www.frankfurt-university.de/mathewerkstatt

Das Team des Mathe-Vorkurses

Grundlegende Fachbegriffe

Ein **Term** ist eine sinnvolle mathematische Zeichenreihe ohne Relationszeichen („=“ oder „<“ bzw. „>“). Eine **Gleichung** bzw. **Ungleichung** ist ein mathematischer Ausdruck, der zwei Terme durch ein Relationszeichen verbindet.

	$a + b$	$a - b$	$a \cdot b$	$a : b$
Operation	Addition	Subtraktion	Multiplikation	Division
Bezeichnung des Terms	Summe	Differenz	Produkt	Quotient
Operanden (a, b)	Summand	a Minuend b Subtrahend	Faktor	a Dividend b Divisor

Entscheiden Sie, ob folgende Zeichenreihen Terme sind. Wenn ja, geben Sie die Art des Terms an. Wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort.

Zeichenreihe	Term? ja nein	Art des Terms (z. B. Summe) bzw. Begründung
$4 - \frac{1}{2}$	☐ ☐	
$-4\frac{a}{b}$	☐ ☐	
$a \cdot 4 - \$$	☐ ☐	
$(a^2 + b^2) = c^2$	☐ ☐	
$(17 - p^2)(\sqrt[3]{8} + m^4)$	☐ ☐	
$\pm \sqrt[4]{}$	☐ ☐	
$a^n + d^2 > \$$	☐ ☐	

Zahlenmengen: Vervollständigen Sie die folgende Tabelle

Name	Symbol	Erklärung	Beispiele
		Alle positiven ganzen Zahlen.	1, 2, 3, ...
	$\mathbb{Z}$		2, ...
		$\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0 \right\}$	2, ...
Reelle Zahlen			2, ...

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

- a) $4 \in \mathbb{N}$ b) $4 \in \mathbb{Z}$ c) $4 \in \mathbb{Q}$ d) $4 \in \mathbb{R}$ e) $0,25 \notin \mathbb{Z}$
 f) $-3 \in \mathbb{Z}$ g) $-3 \notin \mathbb{Q}$ h) $\frac{3}{4} \notin \mathbb{R}$ i) $e \in \mathbb{Z}$ j) $0 \in \mathbb{N}$

Hinweis: $m \in M$ (gesprochen: m Element M) bedeutet „x gehört zu der Menge M“.
 $m \notin M$ (gesprochen: m nicht Element M) bedeutet „x gehört nicht zu M“.

1 Terme mit Klammern umformen

Themenbezogene Fachbegriffe:

assoziativ, kommutativ, distributiv, ausklammern, ausmultiplizieren, faktorisieren

Name des Gesetzes	Struktur	Kommentar
Kommutativgesetz • bzgl. der Addition • bzgl. Multiplikation	$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	Bei den genannten Operationen kann die Position der Operanden getauscht werden. Bei der Subtraktion und der Division ist es verboten.
Assoziativgesetz • bzgl. der Addition • bzgl. Multiplikation	$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$	
Distributivgesetz	„ausmultiplizieren“ ← $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ → „ausklammern/faktorisieren“	

Die Binomischen Formeln (BF) sind Spezialfälle des Distributivgesetzes:

1. Binomische Formel (quadrierte Summe): $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Binomische Formel (quadrierte Differenz): $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Binomische Formel: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

1.1 Lösen Sie die Klammer auf und fassen Sie zusammen.

- a) $7 + 3(a - 2)$ b) $8 - (9 - a) - 2$ c) $3ab - 2(7ac - 5ab)$
 d) $y - 3(-x - y)$ e) $3 - s(5 - t) + s$ f) $x - [a - (x - y)] + a$
 g) $-2zx + (6ya + 2xz)$ h) $(4a - c)(3b - 7)$ i) $2(u + 3)(y - 8)$
 j) $x(11 - y)(12 + z)$ k) $23u - [14v - (8v + 6u - 3v - (43v - 16u) - 16u)]$

1.2 Faktorisieren Sie.

- a) $ax + ay$ b) $x(a + b) - y(a + b)$ c) $(x - y)(3a + b) - (2a - b)(x - y)$
 d) $a(u - v) + b(v - u)$ e) $12cd + 4ac - 16acd$ f) $-18xyz - 36wz - 45vz$
 g) $2ax - 2ay + bx - by - cx + cy$ h) $axnd - axnc + abnd - abnc$

1.3 In der Vorlesung haben Sie den Beweis für die erste Binomische Formel gesehen. Beweisen Sie **a) die zweite binomische Formel**, indem Sie beim folgenden Beweis jeden Umformungsschritt begründen, und **b) die dritte binomische Formel** selbstständig.

Termumformung der 2. BF:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{(a - b)^2} \\
 &= (a - b) \cdot (a - b) \\
 &= (a + (-b)) \cdot (a + (-b)) \\
 &= a \cdot a + a \cdot (-b) + (-b) \cdot a + (-b) \cdot (-b) \\
 &= a^2 - ab - ab + b^2 \\
 &= \mathbf{a^2 - 2ab + b^2}
 \end{aligned}$$

Begründung:

| Potenz als Produkt schreiben
 | Subtraktion als additiv Inverses ausdrücken
 | ...
 |
 |

1.4 Lösen Sie die Klammer mithilfe der binomischen Formeln auf.

- a) $(x + 9)^2$ b) $(v - 14)^2$ c) $(13 - k)^2$
 d) $(-p + 11)^2$ e) $(15 - z) \cdot (15 + z)$ f) $(m - 12) \cdot (m + 12)$

1.5 Schreiben Sie folgende Terme als Produkt, falls möglich.

- a) $t^2 - 49$ b) $196 - z^2$ c) $m^2 + 144$
 d) $-x^2 + y^2$ e) $w^2 - 120$ f) $s^2 - 1$

Tipp: Prüfen Sie die Terme auf Binomische Formeln.

1.6 Ergänzen Sie in den leeren Stellen einen passenden Term unter Verwendung der binomischen Formeln.

- a) $a^2 + 12a + \square = (\square + 6)^2$ b) $\square + 10k + \square = (\square + k)^2$ c) $\square + 2z + z^2 = (\square + \square)^2$

2 Bruchrechnung

Themenbezogene Fachbegriffe:

Zähler, Nenner, erweitern, kürzen, Hauptnenner, Kehrwert

Definition „Rationale Zahlen“

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0 \right\}$$

Die Menge der rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$; Bruchzahlen) ist die Menge aller Zahlen, die man durch Division zweier beliebiger ganzer Zahlen ($\mathbb{Z}$) erhält. Die Zahl oberhalb des Bruchstrichs heißt Zähler. Die Zahl unterhalb des Bruchstrichs heißt Nenner. Dieser darf nicht Null sein, weil die Division durch Null nicht definiert ist.

Ein Bruch kann unterschiedlich interpretiert werden:

- 1.) Ein Teil von einem Ganzen (z. B. $\frac{1}{2}$ bedeutet die Hälfte einer Pizza)
- 2.) Ein Anteil von mehreren Ganzen (z. B. $\frac{1}{2}$ bedeutet eine von zwei Personen)
- 3.) Eine Division (z. B. $\frac{1}{2} = 1:2$)

Kürzen und Erweitern sind Termumformungen von Brüchen. Sie verändern das Aussehen eines Bruchs. Der **Wert des Bruchterms bleibt gleich**. Kürzen und Erweitern braucht man beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen.

Erweitern bedeutet, den ganzen Zähler und den ganzen Nenner mit demselben Term zu multiplizieren. **Kürzen** heißt, den ganzen Zähler und den ganzen Nenner durch denselben Term zu teilen.

Rechnen mit Brüchen und Bruchtermen

Operation	Struktur	Kommentar
Addition	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$	Zwei Bruchterme dürfen addiert bzw. subtrahiert werden, wenn die Nenner gleich sind , d. h. ggf. müssen Sie einer der beiden oder beide Terme erweitern bzw. kürzen.
Subtraktion	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$	
Multiplikation	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	Kurz: „Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner.“ Beachten Sie ggf. das Distributivgesetz.
Division	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert.

2.1 Entscheiden Sie, welcher der beiden Brüche größer bzw. kleiner ist und tragen Sie in das Kästchen das passende Relationszeichen ein.

a) $\frac{16}{17} \square \frac{18}{17}$

b) $\frac{3}{4} \square \frac{3}{8}$

c) $\frac{3}{2} \square \frac{5}{4}$

d) $\frac{4}{10} \square \frac{9}{15}$

e) $-\frac{7}{21} \square -\frac{16}{24}$

f) $\frac{52}{36} \square \frac{26}{52}$

g) $\frac{-3}{4} \square \frac{3}{8}$

h) $\frac{-3}{-4} \square \frac{3}{8}$

i) $\frac{23}{7} \square \frac{13}{4}$

j) $\frac{5}{6} \square \frac{8}{9}$

Tipp: Zähler und Nenner vergleichen.

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis und Ihre Argumentation mit jemand anderen in der Gruppe. Bei welcher Aufgabe müssen Sie nicht rechnen?

2.2 Kürzen Sie die folgenden Brüche, falls dies möglich ist.

a) $\frac{a^2b}{2ab}$

b) $\frac{a^2b}{a^2+a}$

c) $\frac{a^2b}{a^2+b}$

d) $\frac{a^2b}{a^2b+b}$

e) $\frac{a+b}{a-b}$

f) $\frac{a+b}{b+a}$

g) $\frac{a-b}{b-a}$

h) $\frac{a+b}{b^2+a^2}$

i) $\frac{a+b}{b^2-a^2}$

j) $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$

Tipp: Prüfen Sie die Terme mithilfe des Distributivgesetzes oder der binomischen Formeln

2.3 Zeigen Sie, dass die Gleichheit $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ gilt, indem Sie die folgenden Termumformungen (1) bis (6) schrittweise begründen.

$$-\frac{a}{b} \stackrel{(1)}{=} \frac{-1}{1} \cdot \frac{a}{b} \stackrel{(2)}{=} \frac{-1 \cdot a}{1 \cdot b} \stackrel{(3)}{=} \frac{-a}{b} \stackrel{(4)}{=} \frac{-a}{b} \cdot \frac{-1}{-1} \stackrel{(5)}{=} \frac{-a \cdot (-1)}{b \cdot (-1)} \stackrel{(6)}{=} \frac{a}{-b}$$

2.4 Schreiben Sie die Terme jeweils mit nur einem Bruchstrich.

a) $\frac{ab}{cd} \cdot \frac{xy}{uv}$

b) $\frac{ab}{cd} \cdot \frac{x+y}{u+v}$

c) $x : \frac{x^2y}{z}$

d) $(a+c) : \frac{c}{a^2-b^2}$

2.5 Addieren bzw. subtrahieren Sie folgende Brüche.

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}$

b) $\frac{5}{18} - \frac{3-a}{24} + \frac{a}{30}$

c) $\frac{ab}{cd} + \frac{xy}{uv}$

d) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$

e) $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{x+a}$

f) $\frac{2}{x} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x+1}$

3 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Themenbezogene Fachbegriffe:

Potenz, Basis, Exponent, Radikand, Logarithmus, Numerus

Definition „Potenz“

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-viele}} \text{ mit } a \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

Die Potenz a^n ist eine n-fache Multiplikation eines Faktors a mit sich selbst. In anderen Worten stellt eine Potenz eine Kurzschreibweise eines Produkts mit n-vielen gleichen Faktoren dar. Man nennt a die Basis und n den Exponenten (Hochzahl).

Weiterhin ist definiert: $a^0 = 1$ für $a \neq 0$

Potenzgesetze (= Rechenregeln für Potenzen)

Bedingungen	Potenzgesetz ($x, y \in \mathbb{R}$ und $u, v \in \mathbb{N}$)
Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis	$x^u \cdot x^v = x^{u+v}$
Division von Potenzen mit gleicher Basis	$x^u : x^v = x^{u-v}$
Multiplikation von Potenzen mit gleichen Exponenten	$x^u \cdot y^u = (xy)^u$
Division von Potenzen mit gleichen Exponenten	$\frac{x^u}{y^u} = \left(\frac{x}{y}\right)^u$ für $y \neq 0$
Potenzierte Potenzen	$(x^u)^v = x^{u \cdot v}$

Achtung bei der **Addition und der Subtraktion von Potenzen**. Dies ist nur unter der Bedingung möglich, dass sowohl die Basen als auch die Exponenten gleich sind. Allgemein:

$$mx^u \pm nx^u = (m \pm n)x^u \quad (a, b \in \mathbb{R}) \text{ (vgl. Distributivgesetz)}$$

Achtung bei quadrierten Summen und Differenzen: Es gelten die Binomischen Formeln.

Eine Potenz mit negativem Exponenten können Sie ebenfalls als Kehrwert der Potenz mit positivem Exponenten darstellen.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \text{ mit } x \neq 0$$

Beachten Sie den Vorzeichenwechsel im Exponenten (und nicht des Potenzwerts).

3.1 Ergänzen Sie die Lücke $\square$ mithilfe der Potenzgesetze, so dass die Gleichung erfüllt ist.

a) $a^3 \cdot a^{\square} = a^7$ b) $b^{\square} \cdot b^5 = b^3$ c) $c^{-4} \cdot c^{\square} = c^2$ d) $\frac{d^{-3}}{d^{\square}} = d^4$ e) $\frac{e^{\square}}{e^{-6}} = e^{10}$

3.2 Schreiben Sie folgende Terme jeweils als Potenz mit einem Exponenten ($a > 0, b > 0$).

a) $a^4 b^4$ b) $\frac{a^{29}}{b^{29}}$ c) $\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}$ d) $(3a)^6(b+c)^6$

3.3 Schreiben Sie den Term mit positiven Exponenten.

a) a^{-3} b) $a^2 b^{-1}$ c) $\frac{3}{4} x^{-5} y^{-2}$ d) $\frac{u^{-3}}{z^{-5}}$ e) $(x+y-9)^{-2}$

3.4 Fassen Sie folgende Terme so weit wie möglich zusammen.

a) $a^3 + a^2 + b^4 - b^2 + 4a^3 - 7a^2 + \frac{1}{2}b^4$
 b) $3u^2v^3 - 5u^3v^2 + 8v^3u^2 - 2u^3v^2 + 9uv^3$
 c) $\frac{1}{2}b^{-4} + \frac{1}{6}b^{-3} + \frac{1}{2}b^4 + \frac{1}{2}b^{-4} - \frac{1}{6}c^4$

3.5 Vereinfachen Sie folgende Terme so weit wie möglich.

a) $\frac{uv}{a} \cdot \frac{a^2u}{v}$ b) $5x^{3n-2} \cdot \frac{2x^{m-4n+7}}{x^{m-2n}}$ c) $\left(\frac{x^2}{y}\right)^3 \cdot \left(\frac{y^2}{x}\right)^3$ d) $\frac{u^2-v^2}{2mn^3} \cdot \frac{abm^2n}{2(u+v)}$
 e) $\frac{5m^2n+7n}{3m-2n} \cdot \frac{4n^2-9m^2}{15mn^2+10n^3}$

3.6 Addieren Sie.

a) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^5}$ b) $\frac{3}{ac^2} + \frac{b}{(ac)^5}$ c) $\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6-a^5+2a^3-1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2+1}{a^{m-2}}$

3.7 In der Vorlesung haben Sie Beweise mancher Potenzgesetze gesehen. Beweisen Sie zwei weitere Gesetze, indem Sie jeden Umformungsschritt der folgenden Beweise begründen.

a) Termumformung:

$$\begin{aligned} & (xy)^u \\ &= (xy) \cdot (xy) \cdot \dots \cdot (xy) \\ &= xy \cdot xy \cdot \dots \cdot xy \\ &= x \cdot x \cdot \dots \cdot x \cdot y \cdot y \cdot \dots \cdot y \\ &= x^u \cdot y^u \end{aligned}$$

Begründung:

| Potenz als Produkt schreiben
 | ...
 |
 |

b) Sie können die Termumformungen genauso gut in einer Zeile darstellen. Begründen Sie die Schritte (1), (2) und (3).

$$(x^u)^v \stackrel{(1)}{=} x^u \cdot x^u \cdot \dots \cdot x^u \stackrel{(2)}{=} x^{u+u+\dots+u} \stackrel{(3)}{=} x^{u \cdot v}$$

3.8 Lösen Sie die Klammern auf.

a) $(5x+9)^2$ b) $\left(6v - \frac{7}{w}\right)^2$ c) $(15a+z)(15a-z)$

3.9 Schreiben Sie folgende Terme als Produkt.

a) $\frac{1}{64}t^2 - 49$ b) $196x^2 - \frac{1}{121}z^2$ c) $k^6m^2 - \frac{144}{p^2}$

Definition „Wurzel“

Seien $a \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sqrt[n]{a}$ (sprich: die n-te Wurzel aus a), diejenige nicht-negative Zahl x, für die gilt: $x^n = a$. Man nennt a Radikand und n Wurzelexponent.

Der Wurzelterm $\sqrt[n]{a}$ stellt eine Frage dar: Welche Zahl x muss n-fach mit sich selbst multipliziert werden, dass es die Zahl a ergibt.

Wurzeln können gemäß folgender Definition als Potenzen geschrieben werden:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \quad (a \geq 0; m, n \in \mathbb{N}; m \geq 1, n \geq 2)$$

Die Potenzgesetze gelten ebenso für Wurzelterme.

Ferner gilt: $\sqrt[n]{1} = 1$ $\sqrt[n]{0} = 0$ $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

3.10 Ziehen Sie (sofern möglich) die Wurzel ($a > 0, b > 0$).

- a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{64}$ c) $\sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[2]{-16}$ e) $\sqrt[4]{16}$
 f) $\sqrt[3]{125}$ g) $\sqrt{4a^2b^2}$ h) $\sqrt{a^2 + b^2}$ i) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$

3.11 Ziehen Sie teilweise die Wurzel.

- a) $\sqrt{72}$ b) $\sqrt{128}$ c) $\sqrt[2]{50}$ d) $\sqrt[2]{6a^2}$ e) $\sqrt{16a^3}$

3.12 Schreiben Sie folgende Terme jeweils mit einem Wurzelzeichen und als Potenz ($a, b \in \mathbb{R}^+$).

- a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ b) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[4]{b^7}$ c) $b\sqrt{b}$ d) $a^2 \cdot \sqrt[4]{a}$ e) $\sqrt{\sqrt{b}}$

3.13 Quadrieren Sie folgende Terme, für die gilt $x > 0, a > 0$ und $b > 0$.

- a) $\sqrt{x}$ b) $\sqrt[4]{x}$ c) $x + \sqrt{x}$ d) $x^2 - \sqrt[3]{x}$ e) $\sqrt{a+b}$
 f) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

3.14 Vereinfachen Sie, falls möglich.

- a) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}$ c) $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{c}}{\sqrt[4]{b}}$ d) $\frac{\sqrt{p} + \sqrt{p}}{\sqrt{p}}$ e) $\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z} + 1}$

Definition „Logarithmus“

Der Logarithmus von a zur Basis b ist diejenige Zahl, mit der man b potenzieren muss, um a zu erhalten. Man schreibt kurz **$\log_b(a)$** . Man nennt b die Basis und a heißt in diesem Zusammenhang Numerus (= Argument des Logarithmus). Es gelten Einschränkungen: $b > 0$ und $b \neq 1$ und $a > 0$. Der Ausdruck **$x = \log_b(a)$** ist gleichwertig mit **$b^x = a$** .

Für häufig verwendete Basen gibt es besondere Schreibweisen:

Bezeichnung	Schreibweise
binärer Logarithmus	$\lg(a) = \log_2(a)$
natürlicher Logarithmus	$\ln(a) = \log_e(a)$ mit $e \approx 2,718$
dekadischer Logarithmus	$\log(a) = \log_{10}(a)$

Bedingung(en)	Logarithmengesetz
Produkt im Numerus bzw. Summe mehrerer Logarithmenterme mit der gleichen Basis	$\log_b(c \cdot d) = \log_b(c) + \log_b(d)$
Quotient im Numerus bzw. Subtraktion mehrerer Logarithmenterme mit der gleichen Basis	$\log_b\left(\frac{c}{d}\right) = \log_b(c) - \log_b(d)$
Potenz im Numerus	$\log_b(c^d) = d \cdot \log_b(c)$

Bei einer Addition oder Subtraktion im Numerus ist keine Umformung erlaubt.

3.15 Bestimmen Sie die Logarithmen.

a) $\log_3 81$

b) $\log_4 64$

c) $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right)$

d) $\log_5 \sqrt{5}$

e) $\log_5 \left(\frac{1}{5}\right)$

f) $\log_{10}(0,01)$

g) $\ln(e^{17})$

h) $\ln \left(\frac{1}{e}\right)$

i) $\log_z z$

j) $\log_z 1$

k) $\log_z(z^n)$

3.16 Beweisen Sie a) das dritte Logarithmengesetz und b) das zweite Logarithmengesetz, in dem Sie folgende Termumformungen schrittweise begründen.

a) Termumformung:

$$\begin{aligned} & \mathbf{\log_b(c^d)} \\ &= \log_b(c \cdot c \cdot \dots \cdot c) \\ &= \log_b(c) + \log_b(c) + \dots + \log_b(c) \\ &= \mathbf{d \cdot \log_b(c)} \end{aligned}$$

Begründung:

| *Potenz als Produkt schreiben*

| ...

|

b) Termumformung:

$$\begin{aligned} & \mathbf{\log_b(c) - \log_b(d)} \\ &= \log_b(c) + (-1) \cdot \log_b(d) \\ &= \log_b(c) + \log_b(d^{-1}) \\ &= \log_b(c \cdot d^{-1}) \\ &= \mathbf{\log_b\left(\frac{c}{d}\right)} \end{aligned}$$

Begründung:

| *Subtraktion als additiv Inverses schreiben*

| ...

|

|

3.17 Zerlegen Sie folgende Logarithmenterme, soweit gemäß der Logarithmengesetze möglich, in mehrere Terme.

a) $\log_a \left(\frac{x^2 y^3}{u^4 v}\right)$

b) $\log_a(\sqrt[4]{a^3 b^5})$

c) $\ln \left(\frac{ex^2}{xa^{-3}}\right)$

d) $\ln(1 + x^2)$

3.18 Fassen Sie, soweit gemäß der Logarithmengesetze möglich, zu einem Logarithmenterm zusammen.

a) $\log_a u - 2\log_a v + 4\log_a z$

b) $-\log_2 a - \log_2 b - \log_3 c$

c) $\log_{10}(\sqrt{x}) + \log_2 x - \log_{10}(\sqrt{y})$

d) $2\ln 4 + \ln x + \log_e 3$

4 Funktionen und Gleichungen

Themenbezogene Fachbegriffe: Definitionsbereich, Wertebereich, Funktionsvorschrift, Variable, Parameter, Koeffizient, Nullpunkt, Achsenabschnitt, Äquivalenzumformung

Definition „Funktion“:

Eine Funktion ordnet jedem Element x aus ihrer Definitionsmenge **genau ein** Element y aus der Wertemenge zu, d. h. es gibt keinen x -Wert, dem kein oder mehrere y -Werte zugeordnet werden.

$f(x)=y$ bedeutet „eine Funktion mit dem Namen f ordnet einer Zahl x die Zahl y zu“, dabei wird

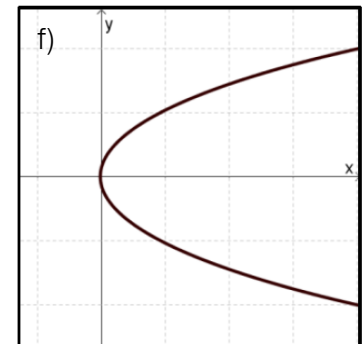
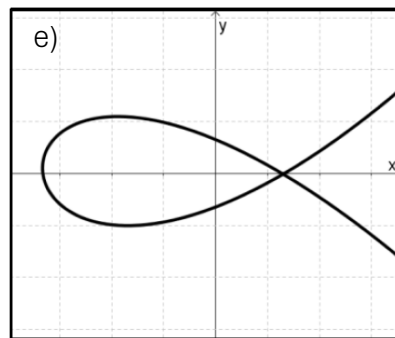
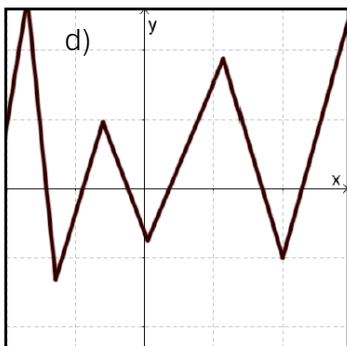
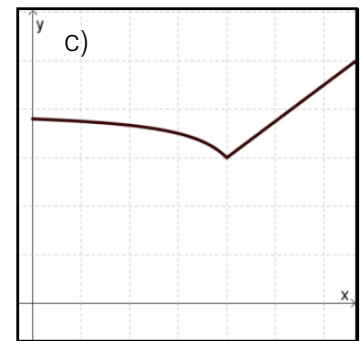
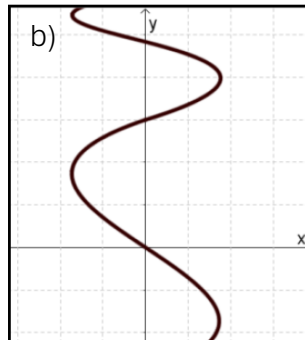
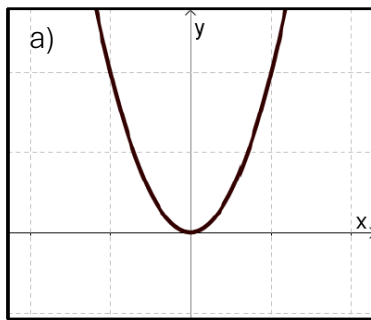
→ x als Stelle oder Argument bzw. unabhängige Variable und

→ y als Funktionswert der Funktion f an der Stelle x bzw. abhängige Variable bezeichnet.

D_f Definitionsmenge/Definitionsbereich einer Funktion f ist diejenige Menge aller Zahlen, die für die unabhängige Variable eingesetzt werden können. Falls bei gegebenen Funktionen nichts angegeben ist, nimmt man üblicherweise die größtmögliche Definitionsmenge für die Funktion an.

W_f Wertemenge/Wertebereich einer Funktion f ist die Menge aller Funktionswerte.

4.1 Welche der folgenden Abbildungen stellen Graphen einer Funktion dar? Begründen Sie Ihre Antwort.



4.2 Welche der folgenden Wertetabellen kann zu einer Funktion gehören? Begründen Sie Ihre Antwort.

Gefahren km	1	2	3	4	5
Preis in €	4	5	6	7	8

x	-1	0	1	2	3
y	3	1	3	5	7

a	-1	-1	1	1	3
b	3	4	3	0	1

4.3 Welcher der folgenden Zusammenhänge kann durch eine Funktion beschrieben werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) „Der Preis ist abhängig von der gekauften Menge einer Ware.“	b) „Jeder natürlichen Zahl wird ihr Vorgänger und ihr Nachfolger zugeordnet.“	c) „Jeder natürlichen Zahl wird die Anzahl ihrer Teiler zugeordnet.“
d) „Einer reellen Zahl x wird ihre Quadratzahl zugeordnet.“	e) „Der Zeit nach dem Öffnen eines Wasserhahns wird die ausgeflossene Wassermenge zugeordnet.“	f) „Bei allen Personen in Hessen wird der Körpergröße das Gewicht zugeordnet.“

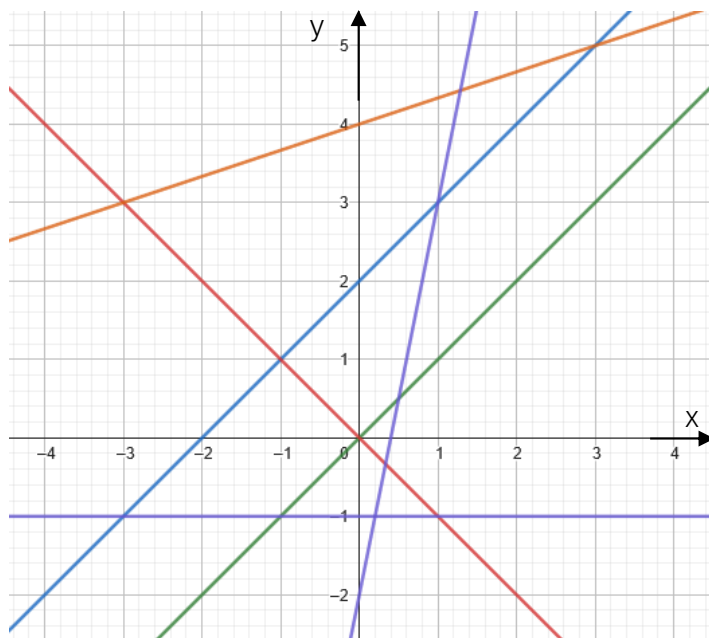
5 Lineare Funktionen und lineare Gleichungen

Eine Funktion f der Form $f(x) = ax + b$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$) heißt **lineare Funktion**, d. h. die unabhängige Variable hat höchstens den Exponenten 1. Man nennt a Koeffizient (Faktor bei der unabhängigen Variablen) und b Konstante. Charakteristisch ist die **konstante Steigung**. Den Graphen bezeichnet man als **Gerade**.

In einer linearen Gleichung hat die Unbekannte höchstens den Exponenten 1. Durch Äquivalenzumformungen kann man herausfinden, ob die Gleichung lösbar ist. Ein Widerspruch bedeutet, es gibt keine Lösung. Bei genau einer Lösung findet man einen konkreten Wert. Eine allgemeingültige Aussage (i. d. Regel $0 = 0$) bedeutet, dass es unendlich viele Lösungen gibt.

5.1 Untersuchen Sie die Graphen, die in folgendem Diagramm gegeben sind.

a) Ordnen Sie folgenden Graphen die passende Funktionsvorschrift zu.



$$\begin{aligned} f(x) &= 5x - 2 \\ g_1(x) &= x \\ g_2(x) &= x + 2 \\ h(x) &= -x \\ n(x) &= -\frac{1}{2}x \\ p(x) &= -1 \\ q(x) &= \frac{1}{3}x + 4 \end{aligned}$$

- b) Lesen Sie im Diagramm sowohl die Nullstelle als auch den Schnittpunkt mit der y-Achse für jede lineare Funktion ab. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis rechnerisch.
- c) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Funktion $g_2(x)$ mit $q(x)$ und prüfen Sie, ob g_1 und g_2 sich schneiden.

5.2 Bestimmen Sie die reellen Lösungen für die Unbekannte x bzw. t der folgenden Gleichungen.

a) $14 + 2x = 11 - 7x$

b) $17(2 - 3x) - 8(1 - 7x) = 5(x + 12)$

c) $a - (a + b)x = (b - a)x - (c + bx)$

d) $\frac{5t - 6}{10} - \frac{9 - 10t}{14} = \frac{3t - 4}{5} - \frac{3 - 4t}{7}$

e) $-8(1 - 7t) - 5(t + 12) = 17(3t - 2) - 34$

6 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) setzt sich aus mehreren linearen Gleichungen zusammen, die gemeinsame Unbekannte enthalten. Gesucht sind Werte für alle Unbekannten, sodass jede Gleichung erfüllt ist.

Strategie zum Lösen LGS

Eliminieren Sie schrittweise die Variablen, indem Sie zwei Gleichungen miteinander kombinieren. Dazu können Sie drei Verfahren nutzen. Sie entscheiden in jedem Schritt, welche Variable an welcher Stelle Sie eliminieren.

Lösungsverfahren:

- 1) Additionsverfahren
- 2) Gleichsetzungsverfahren
- 3) Einsetzungsverfahren

Lösbarkeit:

s. lineare Gleichungen

6.1 Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem drei Mal mit jeweils einem anderen Lösungsverfahren.

$$\begin{cases} 4x + 4y = 4 \\ -10x - 8y = 4 \end{cases}$$

6.2 Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

a) I $x + y + 1 = 0$
II $x - 3y - 6 = 0$

b) I $x - 4y = 2$
II $-2x + 8y + 4 = 0$

c) I $x - 4y = 2$
II $-2x + 8y + 6 = 0$

d) I $6a + 12b = 30$
II $3a + 3b = 9$

e) I $-2s - t = -1$
II $3 = 5s + 4t$

f) I $-2ab + c = -2$
II $5a^2 - 7b = \frac{1}{3}$

g) I $3x + 2y + 5z = 8$
II $-3x + 2y + 5z = 2$
III $6x + y + z = 7$

h) I $\frac{4}{3}a + \frac{6}{9}b + \frac{2}{3}c = \frac{8}{3}$
II $3a - 4b + 3c = -2$
III $-4 = -a - 3b - 2c$

i) I $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
II $-2 = 3x_2 + x_3$
III $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$

6.3 Vergleichen Sie Ihre Lösungswege aus 6.2 mit jemand anderen in der Gruppe.

- i) In welcher Reihenfolge wurden die Unbekannten eliminiert? Begründung?
- ii) Welche(s) Lösungsverfahren wurde(n) angewendet? Begründung?
- iii) Ist ein Weg schneller / leichter / weniger fehleranfällig?

7 Quadratische Funktionen und Gleichungen

Eine Funktion f der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ heißt **quadratische Funktion** (mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$), d. h. die unabhängige Variable liegt mit dem höchsten Exponenten 2 vor. Ihr Graph beschreibt eine **Parabel**.

Quadratische Gleichungen sind Gleichungen, in denen die Unbekannte als höchsten Exponenten zwei hat. Es gibt mehrere Lösungsverfahren, die sich je nach Form der Gleichung anbieten. Es gibt maximal zwei reelle Lösungen.

Form ($a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$)	Lösungsverfahren
$ax^2 + bx + c = 0$	quadratischen Ergänzung oder abc- oder Mitternachtsformel
$x^2 + px + q = 0$	pq-Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
$ax^2 + bx = 0$	Satz vom Nullprodukt $ax^2 + bx = 0$ x ausklammern $x \cdot (ax + b) = 0$ <i>Fallunterscheidung</i> Fall 1 „erster Faktor“: $x_1 = 0$ Fall 2 „zweiter Faktor“: $ax_2 + b = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$
$ax^2 + c = 0$ (rein quadratische Gleichung)	x^2 isolieren, Wurzel ziehen und Betrag auflösen

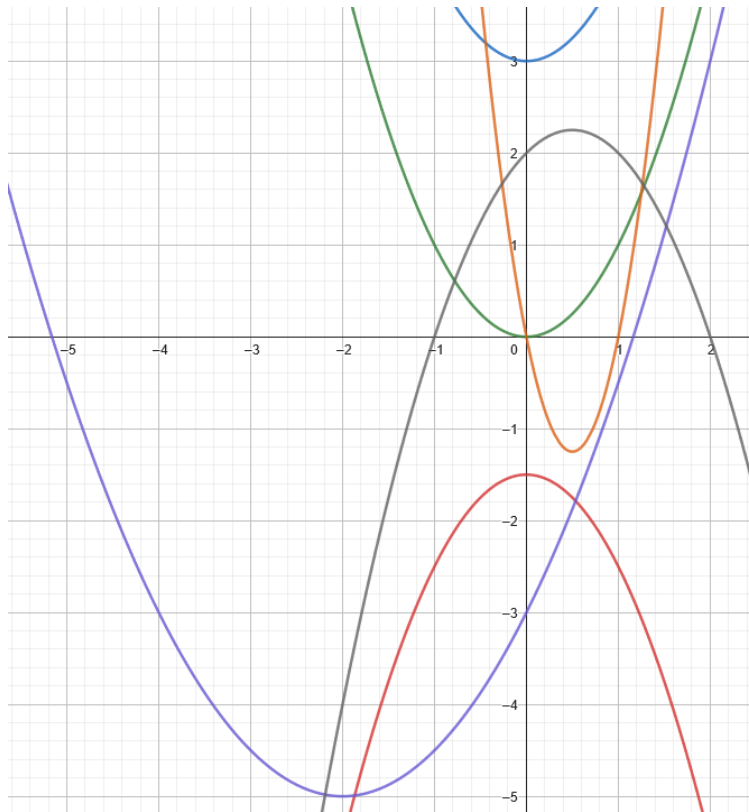
Quadratische Gleichungen haben maximal zwei reelle Lösungen, d. h. es kann keine, genau eine oder zwei Lösungen geben.

7.1 Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen.

- | | | |
|---|--------------------------|---|
| a) $3 - 4x^2 = 5 - 6x^2$ | b) $x^2 - 4x - 21 = 0$ | c) $16x^2 - 96x + 80 = 0$ |
| d) $(x + 1)(x - 2) = 0$ | e) $4z^2 + 12z = 0$ | f) $-\frac{1}{5} = -t^2 + \frac{4}{25}$ |
| g) $11a^2 - 3(a^2 + a) = 8a^2 + 9a$ | h) $x^2 + bx - 2b^2 = 0$ | i) $x^2 + x^4 - 1 = -20$ |
| j) $100 - \frac{6}{3}t^2 = -t^2 + \frac{72}{2}$ | k) $x^2 - 4x + 21 = 0$ | m) $100 - x^2 = 2^x + \frac{71}{3}$ |

7.2 Vergleichen Sie Ihre Lösungswege aus 7.1 mit jemand anderen in der Gruppe. Haben Sie unterschiedliche Lösungsverfahren verwendet? Wenn ja, welcher Lösungsweg gefällt Ihnen besser? Begründung?

7.3 Ordnen Sie folgenden Graphen die passende Funktionsvorschrift zu. Lesen Sie im Diagramm sowohl die Nullpunkte als auch den Schnittpunkt mit der y-Achse ab. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Schnittpunkte mit den Achsen ausrechnen.



$$a(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$$

$$b(x) = 5x^2 - 5x$$

$$c(x) = x^2 + 3$$

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -x^2 - \frac{3}{2}$$

$$h(x) = -x^2 + x + 2$$

7.4 Bestimmen Sie für die folgenden Parabeln die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und den Scheitelpunkt. Skizzieren Sie die Graphen.

a) $r(x) = x^2 - 6x + 8$

b) $s(x) = -2x^2 + 7x - 6$

c) $t(x) = 3 - 4x^2$

7.5 Quadratische Gleichungen mit Parametern lösen.

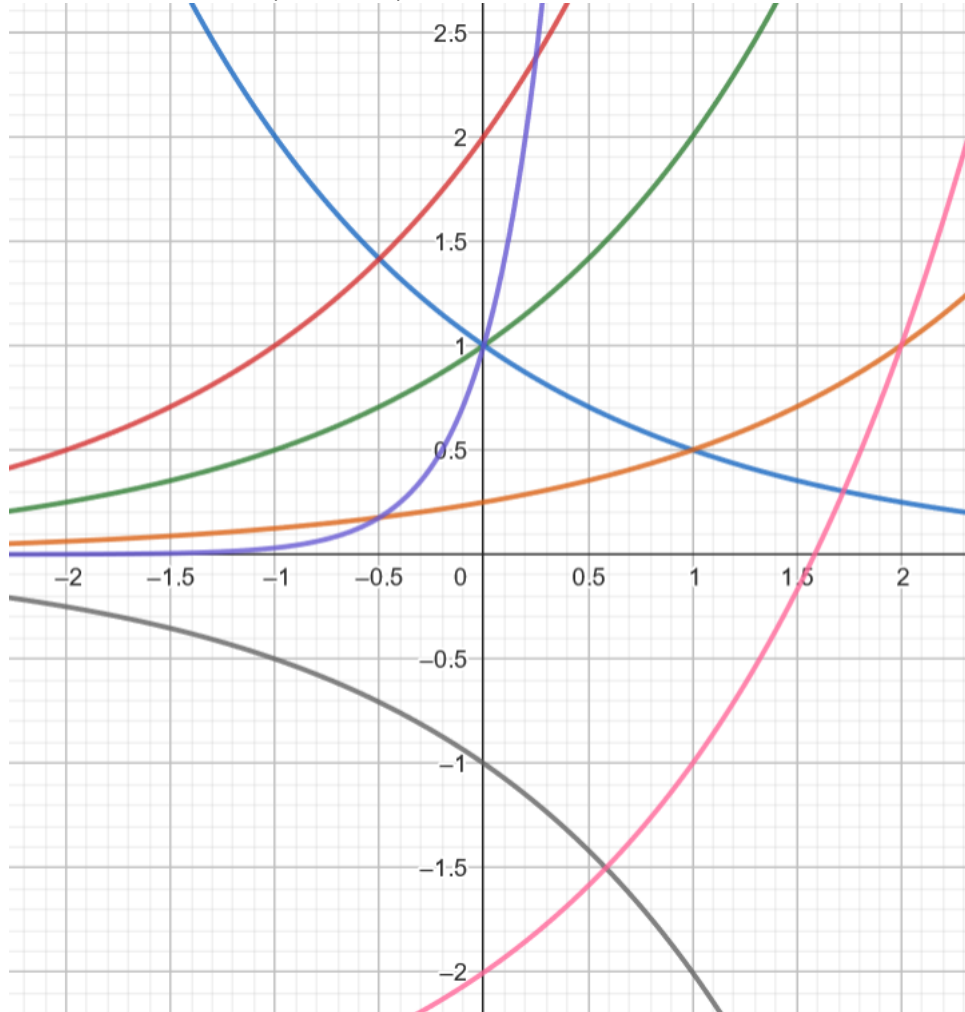
a) Bestimmen Sie den Parameter t so, dass die Gleichung $2x^2 + 4x = t$ genau eine reelle Lösung hat.

b) Prüfen Sie, für welche Werte von a die Gleichung $3x^2 + ax - \frac{9}{2} = 0$

b_1) zwei Lösungen, b_2) genau eine Lösung bzw. b_3) keine Lösung hätte?

8 Exponentialfunktionen und Gleichungen

Ordnen Sie den Graphen die passende Funktionsvorschrift zu.



$$\begin{aligned} a(x) &= 2^{5x} \\ b(x) &= 2^{x-2} \\ f(x) &= 2^x \\ g(x) &= 2^{-x} \\ h(x) &= 2^{x+1} \\ r(x) &= -2^x \\ s(x) &= 2^x - 3 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen.

a) $5^x = 34$

b) $3^x = 32$

c) $4^x = 18$

d) $\frac{2}{3} \cdot 12^{x+3} = 22$

e) $2^{2x-4} = 64$

f) $2^x \cdot 8^{x-1} = 32$

g) $6^{-x} = 12$

h) $4^{3x+1} = 16^{-x}$

i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

9 Lösungen Update v2

Mit den folgenden Lösungswerten können Sie Ihre eigenen Ergebnisse überprüfen. Wir geben keine Lösungswege, da es mehrere Lösungswege gibt. Wichtig ist, dass Sie einen eigenen Weg finden und nicht denjenigen der „Musterlösung“. Die Angaben sind ohne Gewähr. Im Zweifel fragen Sie bitte Ihre Kommiliton*innen oder die Tutor*innen.

1.1 Rechnen mit Klammern

- | | | |
|-------------------------|----------------------|--------------------|
| a) $3a+1$ | b) $a-3$ | c) $13ab-14ac$ |
| d) $3x+4y$ | e) $3-4s+st$ | f) $2x-y$ |
| g) $6ay$ | h) $12ab-28a-3bc+7c$ | i) $2uy-16u+6y-48$ |
| j) $132x+11xz-12xy-xyz$ | k) $29u-52v$ | |

1.2 Faktorisieren Sie.

- | | | |
|--------------------|-------------------|---------------------|
| a) $a(x+y)$ | b) $(a+b)(x-y)$ | c) $(x-y)(a+2b)$ |
| d) $(u-v)(a-b)$ | e) $4c(3d+a-4ad)$ | f) $-9z(2xy+4w+5v)$ |
| g) $(2a+b-c)(x-y)$ | h) $an(x+b)(d-c)$ | |

1.4 Binomische Formeln

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| a) $x^2+18x+81$ | b) $v^2-28v+196$ | c) $169-26k+k^2$ |
| d) $121-22p+p^2$ | e) $225-z^2$ | f) m^2-144 |

1.5 Dritte Binomische Formeln

- | | | |
|------------------------|--------------------------|----------------------------|
| a) $(t-7) \cdot (t+7)$ | b) $(14-z) \cdot (14+z)$ | c) nicht möglich, da Summe |
| d) $(y-x) \cdot (y+x)$ | e) nicht möglich | f) $(s-1) \cdot (s+1)$ |

1.6 Binomische Formeln

- | | | |
|--------------------------------|-------------------------|-----------------------|
| a) $a^2+12 \cdot a+36=(a+6)^2$ | b) $25+10k+k^2=(5+k)^2$ | c) $1+2z+z^2=(1+z)^2$ |
|--------------------------------|-------------------------|-----------------------|

2.1 Brüche vergleichen

- | | | | | |
|------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\frac{16}{17} < \frac{18}{17}$ | b) $\frac{3}{4} > \frac{3}{8}$ | c) $\frac{3}{2} > \frac{5}{4}$ | d) $\frac{4}{10} < \frac{9}{15}$ | e) $-\frac{7}{21} > -\frac{16}{24}$ |
| f) $\frac{52}{36} > \frac{26}{52}$ | g) $\frac{-3}{4} < \frac{3}{8}$ | h) $\frac{-3}{-4} > \frac{3}{8}$ | i) $\frac{23}{7} > \frac{13}{4}$ | j) $\frac{5}{6} < \frac{8}{9}$ |

2.2 Kürzen Sie die folgenden Brüche, falls dies möglich ist.

- | | | | | |
|------------------|---------------------|------------------|------------------------|----------------------|
| a) $\frac{a}{2}$ | b) $\frac{ab}{a+1}$ | c) nicht möglich | d) $\frac{a^2}{a^2+1}$ | e) nicht möglich |
| f) 1 | g) -1 | h) nicht möglich | i) $\frac{1}{b-a}$ | j) $\frac{a+b}{a-b}$ |

2.4 Schreiben Sie mit nur einem Bruchstrich.

- | | | | |
|-----------------------|------------------------------|-------------------|-------------------------------|
| a) $\frac{abxy}{cdv}$ | b) $\frac{ab(x+y)}{cd(u+v)}$ | c) $\frac{z}{xy}$ | d) $\frac{(a+c)(a^2-b^2)}{c}$ |
|-----------------------|------------------------------|-------------------|-------------------------------|

2.5 Addieren bzw. subtrahieren Sie folgende Brüche.

a) $\frac{19}{36}$

b) $\frac{55+27a}{360}$

c) $\frac{abuv+cdxy}{cdv}$

d) $-\frac{2}{x^2-2x}$

e) $\frac{2x}{a^2-x^2}$

f) $\frac{8x+5}{3x^2+3x}$

3.1 Ersetzen Sie x jeweils durch eine Potenz, sodass die Gleichung erfüllt ist.

a) $a^3 \cdot a^4 = a^7$

b) $b^{-2} \cdot b^5 = b^3$

c) $c^{-4} \cdot c^6 = c^{-2}$

d) $\frac{d^{-3}}{d^{-7}} = d^4$

e) $\frac{e^4}{e^{-6}} = e^{10}$

3.2 Schreiben Sie als Potenz mit einem Exponenten

a) $(ab)^4$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{29}$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}$

d) $(3a(b+c))^6$

3.3 Schreiben Sie den Term mit positiven Exponenten.

a) $\frac{1}{a^3}$

b) $\frac{a^2}{b}$

c) $\frac{3}{4x^5y^2}$

d) $\frac{z^5}{u^3}$

e) $\frac{1}{(x+y-9)^2}$

3.4 Fassen Sie folgende Terme so weit wie möglich zusammen.

a) $5a^3 - 6a^2 + \frac{3}{2}b^4 - b^2$

b) $-7u^3v^2 + 11u^2v^3 + 9uv^3$

c) $\frac{1}{2}b^4 + b^{-4} + \frac{1}{6}b^{-3} - \frac{1}{6}c^4$

3.5 Vereinfachen Sie folgende Terme so weit wie möglich

a) u^2a

b) $10x^{n+5}$

c) x^3y^3

d) $\frac{(u-v)abm}{4n^2}$

e) $-\frac{5m^2+7}{5n}$

3.6 Addieren Sie.

a) $\frac{a^3+1}{a^5}$

b) $\frac{3a^4c^3+b}{(ac)^5}$

c) $\frac{a^3-1}{a^{m+1}}$

3.8 Binomische Formeln und Potenzgesetze

a) $25x^2 + 90x + 81$

b) $36v^2 - \frac{84v}{w} + \frac{49}{w^2}$

c) $225a^2 - z^2$

3.9 Binomische Formeln und Potenzgesetze

a) $\left(\frac{1}{8}t - 7\right) \cdot \left(\frac{1}{8}t + 7\right)$

b) $\left(14x - \frac{1}{11}z\right) \cdot \left(14x + \frac{1}{11}z\right)$

c) $\left(k^3m - \frac{12}{p}\right) \cdot \left(k^3m + \frac{12}{p}\right)$

3.10. Ziehen Sie (sofern möglich) die Wurzel ($a > 0, b > 0$).

- a) 6 b) 8 c) 4 d) nicht definiert e) 2
f) 5 g) $2ab$ h) nicht möglich i) $a + b$

3.11 Ziehen Sie teilweise die Wurzel.

- a) $6\sqrt{2}$ b) $8\sqrt{2}$ c) $5\sqrt{2}$ d) $a^2\sqrt{6}$ e) $4a\sqrt{a}$

3.12 Schreiben Sie folgende Terme als Wurzel und Potenz.

- a) $\sqrt{36} = 36^{1/2}$ b) $\sqrt[4]{a^3b^7} = (a^3b^7)^{1/4}$ c) $b^{3/2} = \sqrt{b^3}$
d) $\sqrt[4]{a^9} = a^{9/4}$ e) $b^{1/4} = \sqrt[4]{b}$

3.13 Quadrieren Sie folgende Terme, für die gilt $x > 0, a > 0$ und $b > 0$.

- a) x b) $\sqrt{x}$ c) $x^2 + 2x\sqrt{x} + x$
d) $x^4 - 2x^{7/3} + x^{2/3}$ e) $a + b$ f) $a + 2\sqrt{ab} + b$

3.14 Vereinfachen Sie, falls möglich.

- a) 1 b) $\sqrt[6]{x^4}$ c) keine Umformung möglich
d) 2 e) keine Umformung möglich

3.15 Bestimmen Sie die Logarithmen.

- a) $\log_3 81 = 4$ b) $\log_4 64 = 3$ c) $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = -2$ d) $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$
e) $\log_5 \left(\frac{1}{5}\right) = -1$ f) $\log_{10}(0,01) = -2$ g) $\ln(e^{17}) = 17$ h) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$
i) $\log_z z = 1$ j) $\log_z 1 = 0$ k) $\log_z(z^n) = n$

3.17 Logarithmenterme zerlegen.

- a) $2\log_a(x) + 3\log_a(y) - 4\log_a(u) - \log_a(v)$
b) $\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\log_a(b)$
c) $1 + \ln(x) + 3\ln(a)$
d) keine Umformung erlaubt wegen der Summe im Numerus

3.18 Logarithmenterme zusammenfassen.

- a) $\log_a \left(\frac{uz^4}{v^2}\right)$ b) $\log_2 \left(\frac{1}{ab}\right) - \log_3(c)$
c) $\log_{10} \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right) + \log_2(x)$ d) $\ln(48x)$

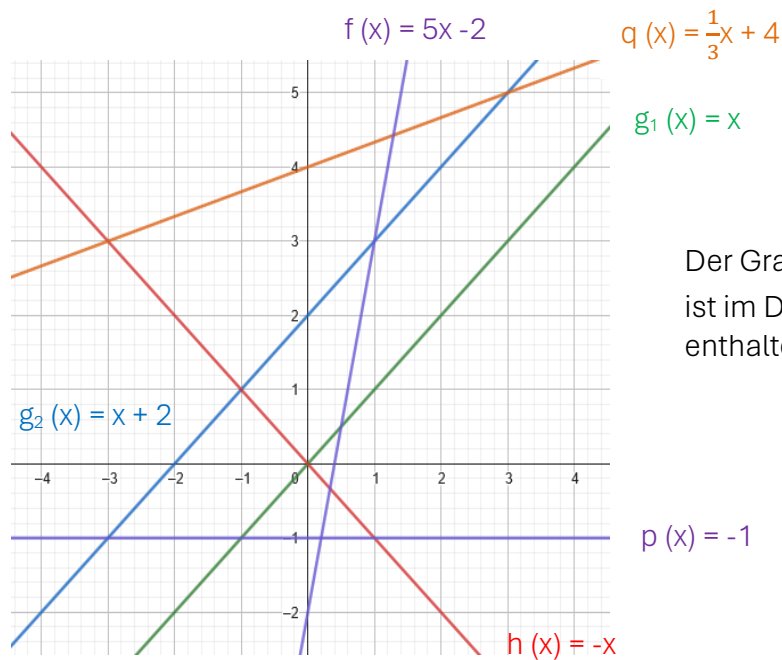
4.1 Die Schaubilder a), c) und d) stellen eine Funktion $f(x)$ dar.

4.2 Die Tabelle a) und b) stellen Funktionen da, für die gilt $y=f(x)$

4.3 a), c), d) und e) beschreiben einen funktionellen Zusammenhang.

5.1 Lineare Funktionen.

a)



Der Graph von $n(x) = -\frac{1}{2}x$ ist im Diagramm nicht enthalten.

b)

Funktionsvorschrift	Nullpunkt	Schnittpunkt mit der y-Achse
$f(x) = 5x - 2$	$N_f(\frac{2}{5} 0)$	$N_f(0 -2)$
$g_1(x) = x$	$N_{g_1}(0 0)$	$N_{g_1}(0 0)$
$g_2(x) = x + 2$	$N_{g_2}(-2 0)$	$N_{g_2}(0 2)$
$h(x) = -x$	$N_h(0 0)$	$N_h(0 0)$
$p(x) = -1$	kein Nullpunkt	$N_p(0 -1)$
$q(x) = \frac{1}{3}x + 4$	$N_q(-12 0)$	$N_q(0 4)$

c)

Schnittpunkt von $g_2(x)$ mit $q(x)$ ist der Punkt S (3|5).

g_1 und g_2 haben aufgrund ihrer Parallelität keinen Schnittpunkt.

5.2 Bestimmen die reellen Lösungen

a) $x = -\frac{1}{3}$

b) nicht lösbar

c) $x = \frac{a+c}{b}$

d) $t = \frac{1}{3}$

e) $t \in \mathbb{R}$, d. h. für t kann jede reelle Zahl eingesetzt werden.

6.1 Die Lösung für das LGS ist das Zahlenpaar $x = -6$ und $y = 7$.

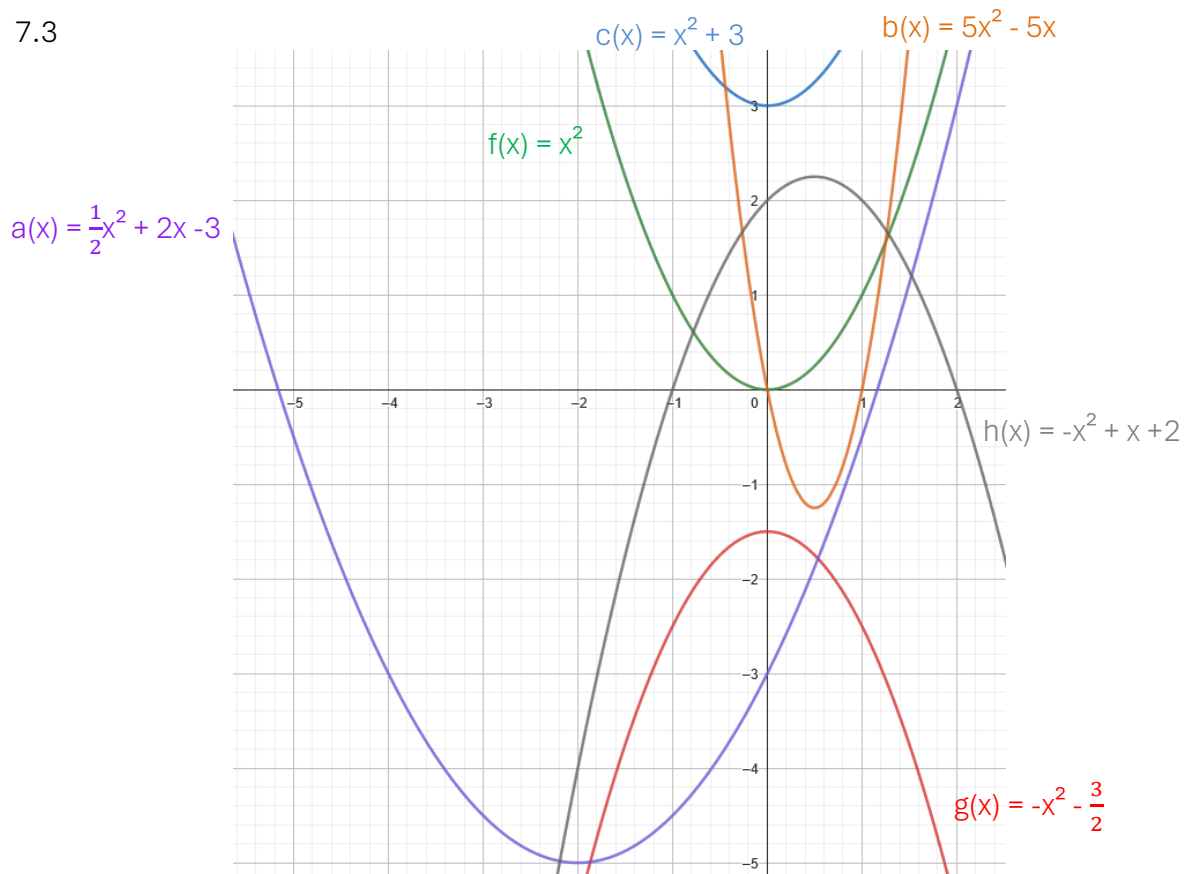
6.2 LGS lösen

- a) $\mathbb{L} = \{(x = \frac{3}{4}, y = -\frac{7}{4})\}$ Interpretation: Schnittpunkt der Geraden im Punkt $S(\frac{3}{4} | -\frac{7}{4})$
 b) Beide Gleichungen beschreiben dieselbe Gerade. Alle Punkte dieser Geraden sind in der Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(x,y) | y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\}$ enthalten.
 c) Es ergibt sich ein Widerspruch, d. h. $\mathbb{L} = \{ \}$. Die beiden Gleichungen sind parallel zueinander, sodass es keinen Schnittpunkt gibt.
 d) $\mathbb{L} = \{(a = 1, b = 2)\}$, d. h. die Geraden schneiden sich im Punkt $S(1|2)$.
 e) $\mathbb{L} = \{(s = t = \frac{1}{3})\}$, d. h. die Gerade schneiden sich im Punkt $S(\frac{1}{3} | \frac{1}{3})$.
 f) Das Gleichungssystem ist nicht linear.
 g) $x = z = 1$ und $y = 0$. Die drei Geraden schneiden sich im Raum in dem Punkt $S(1|0|1)$.
 h) Die drei Gerade schneiden sich im Punkt $P(\frac{7}{4} | \frac{5}{4} | -\frac{3}{4})$.
 i) $\mathbb{L} = \{(x_1 = \frac{1}{3} - \frac{5}{6}t \text{ und } x_2 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}t \text{ und } x_3 = t)\}$ mit $t \in \mathbb{R}$

7.1 Quadratische Gleichungen lösen

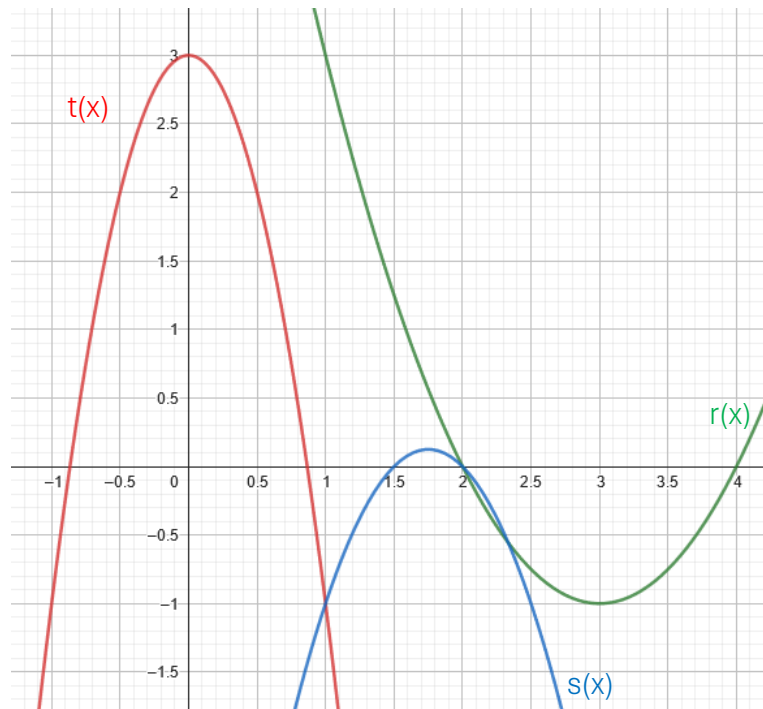
- | | | |
|------------------------|-------------------------|--------------------------------|
| a) $x_1 = 1, x_2 = -1$ | b) $x_1 = 7, x_2 = -3$ | c) $x_1 = 1, x_2 = 5$ |
| d) $x_1 = -1, x_2 = 2$ | e) $z_1 = 0, z_2 = -3$ | f) $t_{1/2} = \pm \frac{3}{5}$ |
| g) $a = 0$ | h) $x_1 = b, x_2 = -2b$ | i) nicht quadratisch |
| j) $t = \pm 8$ | k) keine reelle Lösung | m) nicht quadratisch |

7.3



7.4 Nullpunkte und Scheitelpunkte ermitteln

Funktionsvorschrift	Nullpunkte	Scheitelpunkt
a) $r(x) = x^2 - 6x + 8$	$N_1 (2 0)$ und $N_2 (4 0)$	$S_r (3 -1)$
b) $s(x) = -2x^2 + 7x - 6$	$N_1 (\frac{3}{2} 0)$ und $N_2 (2 0)$	$S_s (\frac{7}{4} \frac{1}{8})$
c) $t(x) = 3 - 4x^2$	$N_1 (-\sqrt{\frac{3}{4}} 0)$ und $N_2 (\sqrt{\frac{3}{4}} 0)$	$S_t (0 3)$

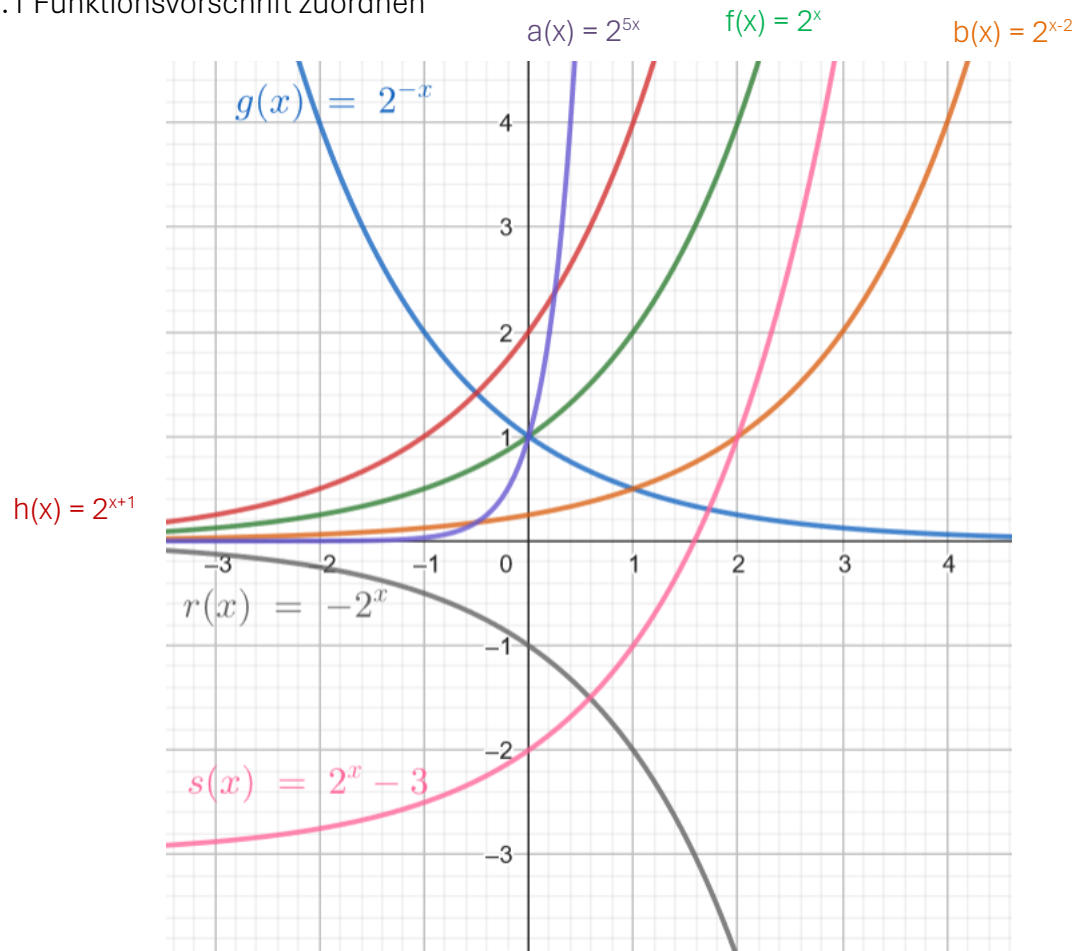


7.5

a) Die Gleichung hat eine Lösung für $t = -2$.

b) b_1) Die Gleichung hat zwei Lösungen für $a \in \mathbb{R}$. Daher gibt es keine Werte für den Parameter a , sodass genau eine Lösung bzw. keine Lösung gibt. (b_2 und b_3).

8.1 Funktionsvorschrift zuordnen



8.2

a) $x = \log_5 34$

b) $x = \log_3 32$

c) $x = \log_4 18$

d) $x = \frac{\log 33}{\log 12} - 3$

e) $x = 5$

f) $x = 2$

g) $x = -\log_6 12$

h) $x = -\frac{1}{5}$

i) $x = 2$